

Examen Final

Exercice 1: (12 pts)

Le tableau suivant donne les dépenses Y en milliers de dinars de 100 étudiants, en fonction des mois X passés à la cité universitaire sans repartir chez eux.

X \ Y	0 ≤ Y < 5	5 ≤ Y < 10	10 ≤ Y < 15	15 ≤ Y < 20
0	13	10	0	0
1	2	15	1	0
2	0	2	14	0
3	0	0	12	15
4	0	0	2	14

1. Donner les lois marginales de X et de Y, les moyennes marginales \bar{X} et \bar{Y} ainsi que $Var(X)$ et $Var(Y)$.
2. Donner la loi conditionnelle $\mathcal{L}(Y/X=1)$.
3. Calculer $Cov(X,Y)$.
4. Calculer le coefficient de corrélation entre Y et X. Que pouvez-vous conclure ?
5. Selon cette étude, quelles seront les dépenses en milliers de dinars d'un étudiant qui reste 6 mois à la cité sans repartir chez lui ?

Exercice 2 : (08 pts)

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, si elle admet pour d.d.p

(densité de probabilité) la fonction : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ avec $\lambda = \frac{1}{E(X)}$.

Une petite entreprise située à Oued Rhiou (Rélizane), fabrique des ampoules LED. Une étude statistique effectuée sur la durée de vie (en années), d'un échantillon d'ampoules issues de cette entreprise a donné le tableau suivant :

Durée de vie X	0 ≤ X < 5	5 ≤ X < 10	10 ≤ X < 15	15 ≤ X < 20
Nombre d'ampoules n_i	63	22	9	6

1. Dire, en utilisant un test du χ^2 , au seuil $\alpha = 0,05$, si l'on peut ajuster cette distribution par une loi exponentielle.
2. Cette entreprise souhaite exporter vers l'Europe, pour ce faire, sa production doit vérifier le critère suivant : au moins 75% des ampoules produites doit avoir une durée de vie supérieure à 13 ans. Selon cette étude l'entreprise est-elle apte à exporter en Europe ?

Table du χ^2

α	0,999	0,995	0,99	0,975	0,95	0,9	0,5	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
v = ddl													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,83
2	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	0,02	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84	16,27
4	0,09	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	0,21	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75	20,51
6	0,38	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55	22,46
7	0,60	0,99	1,24	1,59	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	0,86	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95	26,12
9	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59

Corrigé Examen Final

Exercice 1 : Commençons par observer que $N=100$, ce qui donne la loi

X \ Y	2,5	7,5	12,5	17,5	
0	0,13	0,10	0	0	0,23
1	0,02	0,15	0,01	0	0,18
2	0	0,02	0,14	0	0,16
3	0	0	0,12	0,15	0,27
4	0	0	0,02	0,14	0,16
	0,15	0,27	0,29	0,29	

1. Les lois marginales sont données par les tableaux :

X	0	1	2	3	4
fi.	0,23	0,18	0,16	0,27	0,16

(0,5)

Y	2,5	7,5	12,5	17,5
f.j	0,15	0,27	0,29	0,29

(0,5)

Et par suite

$\bar{X} = 1,95$ et $\text{Var}(X) = 2,0075$

$\bar{Y} = 11,1$ et $\text{Var}(Y) = 27,04$

(0,5 + 0,5)
(0,5 + 0,5)

2.

Y	2,5	7,5	12,5	17,5
f2j/f2.	0,11	0,83	0,06	0

(01)

3. $\text{Cov}(X,Y) = 6,63$ ← (02)

4. $\rho = 0,899953 \approx 0,9$ ← (01)

Comme $\rho \approx 0,9$ qui est "proche" de 1, on peut légitimement penser qu'il y a bien (forte) corrélation linéaire entre Y et X. (01)

5. L'équation de la droite de régression de Y en X est donnée par :

$Y = 3,3X + 4,66$ ← (02)

Ainsi pour une durée de $X = 6$ mois les dépenses d'un étudiant devront être

$Y = 3,3 \times 6 + 4,66 = 24,46 = 24460$ Dinars. ← (02)

Exercice 2 : $N=63+22+9+6=100$

1. Commençons par estimer le paramètre $\lambda = \frac{1}{E(X)}$

$$E(X) = \frac{1}{100} (63 \times 2,5 + 22 \times 7,5 + 9 \times 12,5 + 6 \times 17,5) = 5,4$$

$$\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{5,4} = 0,185$$

Il faut à présent calculer les probabilités théoriques $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx = 0,185 \int_a^b e^{-0,185x} dx$

Durée de vie X	$0 \leq X < 5$	$5 \leq X < 10$	$10 \leq X < 15$	$15 \leq X < 20$
n_i Observés	63	22	9	6
p_i théoriques	0,603	0,239	0,095	0,038
$Np_i = 100p_i$	60,3	23,9	9,5	3,8

1,5

La condition $Np_i > 5$ n'est pas vérifiée, il faut regrouper les deux dernières classes

Durée de vie X	$0 \leq X < 5$	$5 \leq X < 10$	$10 \leq X < 20$
n_i Observés	63	22	15
p_i théoriques	0,603	0,239	0,133
$Np_i = 100p_i$	60,3	23,9	13,3

1,5

$$\chi^2_{cal} = \frac{(63 - 60,3)^2}{60,3} + \frac{(22 - 23,9)^2}{23,9} + \frac{(15 - 13,3)^2}{13,3} = 0,488$$

1,5

χ^2_{Thq} Correspond à $\alpha = 0,05$ et $ddl=3-1-1=1$ (car on a estimé le paramètre λ), donc de la table

$$\chi^2_{Thq} = 3,84$$

0,5

Par conséquent $\chi^2_{cal} < \chi^2_{Thq}$ donc on accepte l'ajustement des données observées par une loi exponentielle au seuil $\alpha = 0,05$.

01

2. Pour pouvoir exporter en Europe, la condition à vérifier est

$$P(X > 13) = 0,75 = 75\%$$

Or

$$P(X > 13) = 0,185 \int_{13}^{+\infty} e^{-0,185x} dx = 0,09 = 9\%$$

On est donc encore bien loin des 75% exigés. Cette entreprise n'aura donc pas l'autorisation d'exporter en Europe.

02