Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2023-2024
$1^{ère}$ Année
MATH1

# Examen Final

**Exercice 1 :** (06 pts)

I. Donner le développement limité à l'ordre $n = 3$ en $x_0 = 0$ des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = (sinx)(ln(1+x)), \qquad f_2(x) = e^{sinx}$$

II. Calculer les limites

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sinx ln(1+x)}{4x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{sinx} - 1 - x}{x^2}\right)$$

**Exercice2 :** (07 pts)

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, trouver les réels $a, b$ vérifiant

$$\frac{1}{k^2 + 5k + 6} = \frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+3}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2 + 5k + 6}$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

**Exercice 3 :** (07 pts)

Soit l'application
$$f : ]0, +\infty[ \longrightarrow [-4, +\infty[$$
$$x \longmapsto f(x) = x^4 - 4x^2$$

1. $f$ est-elle injective ?

2. $f$ est-elle surjective ?

3. $f$ est-elle bijective ? Si oui, donner l'expression de $f^{-1}(x)$.

Corrigé Examen Final MATH1. 2023-2024.

**Exercice 1**: I/ $DL_3(0)$ des fonctions : $f_1(x) = \sin x \ln(1+x)$ et $f_2(x) = e^{\sin x}$.

$$f_1(x) = \sin x . \ln(1+x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$f_1(x) = \sin x . \ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$ 1,5

$$f_2(x) = e^{\sin x} \quad , \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o(X^3).$$

I/ suffit de prendre $X = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ on a bien $X \to 0$ qd $x \to 0$

$$X = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Longrightarrow X^2 = XX = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 + o(x^3)$$

$$\Longrightarrow X^3 = X^2 X = (x^2 + o(x^3))\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^3 + o(x^3)$$

Ainsi : $f_2(x) = e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}(x^2) + \frac{1}{6}(x^3) + o(x^3)$

$$f_2(x) = e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$ 1,5

II./

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x \ln(1+x)}{4x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right)}{4x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x}{2} + o(x)}{4} = \frac{1}{4}$$ 1,5

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + o(x)\right) = \frac{1}{2}$$ 1,5

**Exercice 2**

1./

$$\frac{1}{k^2 + 5k + 6} = \frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+3} = \frac{a(k+3) + b(k+2)}{(k+2)(k+3)} = \frac{(a+b)k + 3a + 2b}{k^2 + 5k + 6}$$

Par identification : $\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Longrightarrow a = 1$ et $b = -1$ 02

Donc : $$\frac{1}{k^2 + 5k + 6} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}.$$

2./ $$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+5k+6} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$$

$$u_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$$ 02

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2}.$$ 03

Exercice 3 : $f : ]0,+\infty[ \longrightarrow [-4,+\infty[$
$x \longmapsto x^4 - 4x^2.$

1. $f$ injective ?!

Soient $x_1, x_2 \in ]0,+\infty[$ $(x_1>0$ et $x_2>0)$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1^4 - 4x_1^2) = (x_2^4 - 4x_2^2)$$
$$\Rightarrow (x_1^4 - x_2^4) - 4(x_1^2 - x_2^2) = 0$$
$$\Rightarrow (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) - 4(x_1^2 - x_2^2) = 0$$
$$\Rightarrow (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0$$
$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0.$$
$$\Rightarrow (x_1 = x_2) \text{ ou } (x_1 = -x_2) \text{ ou } (x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0$$

Comme $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ $x_1 = -x_2$ n'est jamais réalisée donc rejetée.

$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2^2 = 4 - x_1^2$. (Comme $x_2^2 > 0$, il est nécessaire d'avoir $4 - x_1^2 > 0$)

$4 - x_1^2 > 0 \Rightarrow x_1^2 < 4 \Rightarrow x_1 < 2$ $(x_1 > 0)$.

Donc si $0 < x_1 < 2$ alors $x_2 = +\sqrt{4 - x_1^2}$ $(x_2 > 0)$

Prenons par exemple $x_1 = 1$ $(0 < 1 < 2)$

$$x_2 = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

$f(x_1) = f(1) \Rightarrow f(1) = 1 - 4 = -3$

$f(x_2) = f(\sqrt{3}) \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 9 - 12 = -3$

$f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$

Donc $f$ n'est pas injective. 03

2. $f$ surjective?!

Soit $y \in [-4,+\infty[$ $(y \geqslant -4)$ ; il faut résoudre en $x$ l'équation

$y = f(x)$ avec la condition $x \in ]0,+\infty[$ (Car $f : ]0,+\infty[ \longrightarrow [-4,+\infty[$ )

$y = f(x) \Longrightarrow y = x^4 - 4x^2 \Longrightarrow x^4 - 4x^2 - y = 0$

Posons $X = x^2 \Longrightarrow X^2 - 4X - y = 0$ $(X > 0$ car $x > 0)$

$\Delta = 16 + 4y = 4(4+y)$.

Comme $y \geqslant -4$ alors $\Delta \geqslant 0$.

- Si $y = -4$ : $\Delta = 0$, $X_1 = X_2 = 2$ et $x = \sqrt{2}$

  On a bien $-4 = f(\sqrt{2})$ (on ne prend pas $-\sqrt{2}$ car $x > 0$ )

- Si $y \neq -4$ on a $y > -4$ et $\Delta > 0$.

$X_1 = \dfrac{4 - 2\sqrt{4+y}}{2}$ | $X_2 = \dfrac{4 + 2\sqrt{4+y}}{2}$

$X_1 = 2 - \sqrt{4+y}$ | $X_2 = 2 + \sqrt{4+y} > 0$

•• Si $y \geqslant 0$ $X_1 \leqslant 0$ rejeté | Donc $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{4+y}}$ existe et accepté

•• Si $y < 0$ $X_1 > 0$

$x_1 = \sqrt{2 - \sqrt{4+y}}$ accepté

En Conclusion :

- Si $y = -4$, $\exists\, x = \sqrt{2} \in ]0,+\infty[$, $y = f(x)$.
- Si $-4 < y < 0$, $\exists\, x_{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 \pm \sqrt{4+y}} > 0$, $y = f(x_{\frac{1}{2}})$
- Si $y \geqslant 0$, $\exists\, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{4+y}} > 0$, $y = f(x_2)$.

Ainsi $\forall y \in [-4,+\infty[$, $\exists\, x \in ]0,+\infty[$, $y = f(x)$.

l'équation $y = f(x)$ possède toujours au moins une solution dans $]0,+\infty[$.

03

$f$ est surjective.

3. $f$ n'est pas injective, donc $f$ n'est pas bijective, et $f^{-1}$ n'existe pas.

01