Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Spécialité Productique

Année 2012-2013
1ère Année
Outils Mathématiques

Examen final

Exercice 1 : (06pts)

En utilisant un développement de Taylor Maclaurin de la fonction $f(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ***; déduire la valeur de la limite*** $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})}{7x^6}$

Exercice 2 : (04pts)

1. ***Calculer les racines carrées de*** $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
2. ***En déduire les valeurs de*** $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$ ***et*** $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)$

Exercice 3 : (06pts)

Calculer ce qui suit

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+3}dx \quad ; \quad I_2 = \int \frac{1}{\sin x}dx \quad ; \quad I_3 = \int_{-1}^{1} x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$$

Exercice 4 : (04pts)

1. ***Résoudre l'équation*** $y'' + 2y' + y = e^{-3x}$
2. ***Trouver la solution qui vérifie*** $y(0) = y'(0) = 0$

Barème :

Exercice 1 : 6 points ; question1= 3points, question2= 3points.

Exercice 2 : 4 points ; question1= 2points, question2= 2points.

Exercice 3 : 6 points ; I_1 *= 2 points,* I_2 *= 2 points,* I_3 *= 2 points.*

Exercice 4: 4 points ; question1= 2points, question2= 2points.

Outils Mathématiques.

Examen Final.

Ex1 : (Devoir 1).

$f(x) = ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f(0) = 1.$

$f'(x) = sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f'(0) = 0.$

$f''(x) = ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f''(0) = 1.$

$f'''(x) = sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f'''(0) = 0.$

$f^{(4)}(x) = ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1.$

$f^{(5)}(x) = sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(5)}(0) = 0.$

$f^{(6)}(x) = ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow f^{(6)}(0) = 1.$

$f^{(7)}(\theta x) = sh(\theta x)$

$$f(x) = ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} sh(\theta x) \quad 0 < \theta < 1 \quad (03pts)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)}{7x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} sh(\theta x)}{7x^6} = \frac{1}{6! \times 7} = \frac{1}{7!} \quad (03pts).$$

Ex2 : (traité en TD).

1/ $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$; $(x+iy)$ racine carrée de z, alors :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \end{cases} ;$$

x et y de même signe.

les racines de z sont $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}\right)$ .... (02pts)

2/ Il suffit d'observer que $z = e^{i\pi/4}$; d'un autre côté $\left(e^{i\frac{9\pi}{8}}\right)^2 = e^{i\frac{9\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)} = e^{i\pi/4}$; donc $e^{i\frac{9\pi}{8}}$ est une racine carrée de $e^{i\pi/4}$; Comme $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)$ sont nécessairement négatifs.

on a $\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$; $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$ ... (02pts)

Ex 3 :

$*\ I_1=\int \frac{x-1}{\underbrace{x^2+x+3}_{\Delta<0}}\,dx$ (Examen 2012).

$$I_1=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-1-1/2}{x^2+x+3}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+3)-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2+x+3}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+3)-3/2\int\frac{1}{(x+1/2)^2+\frac{11}{4}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+3)-\frac{6}{11}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)^2+1}\,dx.$$

On pose $t=\frac{2x+1}{\sqrt{11}}$; $dx=\frac{\sqrt{11}}{2}dt \Rightarrow I_1=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+3)-\frac{3}{\sqrt{11}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)+C$ (C∈ℝ)

(02pts)

$*\ I_2=\int\frac{1}{\sin x}\,dx$ (traité en cours) on pose $t=\mathrm{tg}\,x/2$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2} \text{ et } \sin x=\frac{2t}{1+t^2}.$$

$$I_2=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C \quad (C\in\mathbb{R})$$

(02pts)

$*\ I_3=\int_{-1}^{+1}x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=0$ car $f(x)=x^3\sqrt{4-x^2}$ est définie sur $[-2,2]$ et elle est impaire. (02pts)

Ex 4 :

1/ $y''+2y'+y=e^{-3x} \rightarrow$ ESSM $y''+2y'+y=0 \rightarrow$ Eq caracteristique $(r+1)^2=0$

$r=r_1=r_2=-1$.

$y_0=(C_1+C_2x)e^{-x}$ $C_1, C_2\in\mathbb{R}$.

$y=y_0+y_*$, $y_*=(C_1(x)+C_2(x)\cdot x)e^{-x}$ avec $\begin{cases} C_1'e^{-x}+C_2'\cdot xe^{-x}=0 \\ -C_1'e^{-x}+C_2'(e^{-x}-xe^{-x})=e^{-3x}\end{cases}$

$y_*=\frac{1}{4}e^{-3x}$ donc $\boxed{y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{4}e^{-3x}}$ $C_1, C_2\in\mathbb{R}$ (02pts)

2/ $\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+\frac{1}{4}=0 \\ \left(C_2-(C_1+C_2x)\right)e^{-x}-\frac{3}{4}e^{-3x}\Big|_{x=0}=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-\frac{1}{4} \\ C_2=\frac{1}{2}\end{cases}$

$$\boxed{y=\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x\right)e^{-x}+\frac{1}{4}e^{-3x}}$$ (02pts)