Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2022-2023
1ère Année
MATH2

Examen final

***Exercice1 :** (08 pts) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, un paramètre réel, on considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

1. *Pour quelle(s) valeur(s) de λ, la matrice A est-elle inversible ?*
2. *Lorsque cela est possible, calculer A^{-1}.*
3. *En utilisant ce qui précède, résoudre le système*

$$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

***Exercice2 :** (07 pts) Résoudre l'équation différentielle du premier ordre linéaire suivante*

$$y' + y = cosx$$

Puis trouver l'unique solution qui vérifie

$$y(0) = 1$$

***Exercice3 :** (05 pts) En utilisant une intégration par parties calculer*

$$I_1 = \int lnx dx$$

$$I_2 = \int (lnx)^2 dx$$

$$I_3 = \int (lnx)^3 dx$$

Puis déduire (sans démonstration) la valeur de

$$I = \int (lnx)^{2023} dx$$

Corrigé Examen final

MATH2 . L1. GI. Année : 2022-2023.

Exercice 1 : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\det A = -1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = -(2\lambda+2) + 2(4\lambda+4) = 6\lambda+6$

$\det A = 6(\lambda+1)$. $\det A = 0 \iff \lambda = -1$. 1,5 pt

A est inversible ssi $\lambda \neq -1$. 0,5 pt

2. $Com(A) = \begin{pmatrix} 2\lambda+2 & -(4\lambda+4) & 0 \\ 2\lambda & -\lambda & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t Com(A) = \begin{pmatrix} 2\lambda+2 & 2\lambda & 4 \\ -(4\lambda+4) & -\lambda & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

Ainsi pour $\lambda \neq -1$ on a : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t Com(A)$.

$$A^{-1} = \frac{1}{6(\lambda+1)} \begin{pmatrix} 2\lambda+2 & 2\lambda & 4 \\ -(4\lambda+4) & -\lambda & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\lambda}{3(\lambda+1)} & \frac{2}{3(\lambda+1)} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{\lambda}{6(\lambda+1)} & \frac{-1}{3(\lambda+1)} \\ 0 & -\frac{1}{2(\lambda+1)} & \frac{1}{\lambda+1} \end{pmatrix}$$ 02 pts

3. Il faut distinguer deux cas :

1er cas : $\lambda \neq -1$: $\begin{cases} -x-2y=0 \\ 4x+2y-2z=2 \\ 2x+y+\lambda z=1 \end{cases} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & \frac{\lambda}{3(\lambda+1)} & \frac{2}{3(\lambda+1)} \\ -2/3 & -\frac{\lambda}{6(\lambda+1)} & \frac{-1}{3(\lambda+1)} \\ 0 & -\frac{1}{2(\lambda+1)} & \frac{1}{\lambda+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -1/3 \\ z = 0 \end{cases}$ 03 pts

2ème cas : $\lambda = -1$ $\begin{cases} -x-2y=0 \\ 4x+2y-2z=2 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} -x-2y=0 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2y \\ z=-3y-1 \end{cases}$

Le système dans ce cas admet une infinité de solutions pour chaque $y \in \mathbb{R}$, $x = -2y$, $z = -3y-1$. 1 pt

Exercice 2 : $\quad y'+y=\cos x$

Le facteur intégrant est $e^x \Rightarrow e^x y' + e^x y = \cos x \cdot e^x$. 1pt

Donc $\quad (e^x y)' = e^x \cos x \Rightarrow e^x y = \int e^x \cos x \, dx$.

Posons $\quad J = \int e^x \cos x \, dx$ une intégration par parties avec $\begin{cases} f=\cos x \to f' = -\sin x \\ g' = e^x \to g = e^x \end{cases}$

Donne : $\quad J = e^x \cos x + \int \sin x \, e^x dx$ une intégration par parties : $\begin{cases} f=\sin x \to f' = \cos x \\ g' = e^x \to g = e^x. \end{cases}$

Donne : $\quad J = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x(\cos x + \sin x) - J.$

Donc $\quad 2J = e^x(\cos x + \sin x) \Longrightarrow J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$ 1pt

Ainsi $\quad e^x y = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C \quad C \in \mathbb{R}$

Donc $\quad y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + Ce^{-x} \quad C \in \mathbb{R}$ 03pts

L'unique solution qui vérifie $y(0)=1$.

$y(0) = \frac{1}{2}(\cos 0 + \sin 0) + Ce^{-0} = \frac{1}{2} + C = 1 \Longrightarrow C = \frac{1}{2}.$ 1pt

La solution cherchée est donnée par :

$$y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} e^{-x}$$ 1pt

$$y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^{-x}).$$

Exercice 3 : Intégration par parties.

$$I_1=\int \ln x\,dx=\int 1.\ln x\,dx \left\langle \begin{array}{l} f=\ln x \rightarrow f'=\frac{1}{x} \\ g'=1 \longrightarrow g=x \end{array}\right. \Rightarrow I_1= x\ln x-\int x.\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow I_1= x\ln x - x + C \quad (C\in\mathbb{R})$$

$$I_1 = x(\ln x - 1) + C. \quad C\in\mathbb{R}.$$ 1pt

$$I_2=\int (\ln x)^2dx=\int 1.(\ln x)^2dx \left\langle \begin{array}{l} f=(\ln x)^2 \rightarrow f'=\frac{2\ln x}{x} \\ g'=1 \longrightarrow g=x \end{array}\right. \Rightarrow I_2= x\ln^2 x - 2\underbrace{\int \ln x\,dx}_{I_1}$$

$$\Rightarrow I_2 = x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C.$$

$$I_2 = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C \quad C\in\mathbb{R}.$$ 1pt

$$I_3=\int (\ln x)^3dx=\int 1.(\ln x)^3dx \left\langle \begin{array}{l} f=\ln^3 x \Rightarrow f'=\frac{3\ln^2 x}{x} \\ g'=1 \Rightarrow g=x \end{array}\right. \Rightarrow I_3= x\ln^3 x - 3\underbrace{\int (\ln x)^2dx}_{I_2}$$

$$\Rightarrow I_3 = x\ln^3 x - 3(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x) + C$$

$$I_3 = x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6) + C \quad (C\in\mathbb{R})$$ 1pt

Remarque : Pour le calcul de I_2 et I_3 on aurait pu faire un autre choix pour f et g' par exemple $I_2=\int \ln^2 x\,dx = \int \underbrace{(\ln x)}_{f}\underbrace{(\ln x)}_{g'}\,dx$

On arrive au même résultat avec un calcul plus long.

$$I=\int (\ln x)^{2023}dx = \left[x\cdot\sum_{k=0}^{2023}\left((-1)^{2023-k}\cdot \frac{(2023)!}{k!}\cdot (\ln x)^k \right) + C \right] \quad C\in\mathbb{R}$$

02pts

Remarque : Pour trouver cette dernière formule, il faut continuer dans un brouillon à calculer $\int (\ln x)^4dx$, $\int (\ln x)^5dx$ ...