Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
1ère Année MI
Algèbre II

Examen final

***Exercice 1** : (08 points)*

I. *Soit la matrice :* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.*
2. *En déduire la solution du système :*

$$\begin{cases} -x + y - z = \alpha_1 \\ x + y + z = \alpha_2 \\ x - 2y + 4z = \alpha_3 \end{cases}$$

Où α_1, α_2 et α_3 sont trois réels donnés.

II. *Soit la matrice :* $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$

où a, b et c sont trois réels non nuls. Dire pour quelle(s) valeur(s) de a, b et c la matrice B est inversible.

***Exercice 2** : (12 points)*

Soit l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (-x + y - z, -x + y + z, -2x + 2y)$$

1. *Soit $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donner $M_1 = M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$.*
2. *Soit $\mathcal{B}_2$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie comme suit : $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1), (2,0,1), (0,-1,1)\}$.*

   Par deux méthodes, calculer $M_2 = M(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.
3. *Soit $\mathcal{B}_3$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie comme suit : $\mathcal{B}_3 = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$.*

   Par deux méthodes, calculer $M_3 = M(f, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_3)$.
4. *Sans les calculer, Montrer que $det(M_1) = det(M_3)$*