Corrigé de l'examen final

Algèbre I.

Exercice 1: Sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff x^3-3x=y^3-3y$.

1°/ $\mathcal{R}$ relation d'équivalence: Reflexive + symetrique + transitive. $\boxed{1pt}$

2°/ Soit $a\in\mathbb{R}$, $\dot{a}=\{x\in\mathbb{R},\ x\mathcal{R}a\}=\{x\in\mathbb{R},\ a\mathcal{R}x\}$.

$x\mathcal{R}a \Rightarrow x^3-3x=a^3-3a \Rightarrow x^3-a^3-3(x-a)=0 \Rightarrow (x-a)[x^2+ax+a^2-3]=0$.

Donc $x=a$ ou $x^2+ax+a^2-3=0$; pour résoudre la deuxième équation:

$\Delta = 12-3a^2$ D'où

a	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{1pt}$

1er Cas: Si $a\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]2,+\infty[$, $\Delta<0$ alors $\dot{a}=\{a\}$ $\boxed{1pt}$

2ème Cas: Si $a\in\,]-2,2[$, $\Delta>0$ $\dot{a}=\{a,a_1,a_2\}$ avec $a_1=\dfrac{-a-\sqrt{12-3a^2}}{2}$

$a_2=\dfrac{-a+\sqrt{12-3a^2}}{2}$ $\boxed{1pt}$

3ème et 4ème Cas: $a=\pm 2$ $\Delta=0$ $\dot{a}=\{a,\frac{-a}{2}\}$.

i.e. $\dot{2}=\{2,-1\}$; $(\dot{-2})=\{-2,1\}$ $\boxed{1pt}$

Exercice 2: Dans $\mathbb{R}-\{2\}$; $x*y=xy-2(x+y)+6$.

1°/ $(\mathbb{R}-\{2\},*)$ est un groupe commutatif, en effet:

i/ $*$ est une l.c.i car si $x,y\in\mathbb{R}-\{2\}$ alors $(x*y)=xy-2(x+y)+6\in\mathbb{R}$ il suffit donc de montrer que $(x*y)\neq 2$; par l'absurde supposons que $x,y\in\mathbb{R}-\{2\}$ et que $x*y=2 \Rightarrow xy-2(x+y)+6=2 \Rightarrow x(y-2)=2y-4$

$\underset{y\neq 2}{\Rightarrow} x=2$ contradiction avec $x\neq 2$.

ii/ $*$ est commutative car $\forall x,y\in\mathbb{R}-\{2\}$ $x*y=xy-2(x+y)+6=yx-2(y+x)+6=y*x$

iii/ $*$ est associative car $\forall x,y,z\in\mathbb{R}-\{2\}$ $(x*y)*z=xyz-2xy-2xz-2yz+4x+4y+4z-$

et $x*(y*z)=xyz-2xy-2xz-2yz+4x+4y+4z-6=(x*y)*z$.

iv/ $*$ possède un élément neutre en effet: $\exists e,\ \forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$

$x*e=x \Rightarrow xe-2(x+e)+6=x \Rightarrow e(x-2)=3x-6 \underset{(x\neq 2)}{\Rightarrow} e=3$ $(e\in\mathbb{R}-\{2$

1/ chaque élément $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ possède un symétrique $x' \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$; en effet:

$$x * x' = 3 \Rightarrow xx' - 2(x+x') + 6 = 3 \Rightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2} \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$\left(x' = 2 \Rightarrow \dfrac{2x-3}{x-2} = 2 \Rightarrow -3 = -4 \text{ impossible}\right)$.

i/ $\boxed{1pt}$, ii/ $\boxed{0{,}5pt}$, iii/ $\boxed{1{,}5pt}$, iv/ $\boxed{1pt}$, v/ $\boxed{1pt}$

2°/ $f : (\mathbb{R}\setminus\{2\}, *) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$ $f(x) = x - 2$ est un morphisme car:

$$\left.\begin{array}{l} f(x*y) = [xy - 2(x+y) + 6] - 2 = xy - 2(x+y) + 4 \\ f(x)\cdot f(y) = (x-2)\cdot(y-2) = xy - 2(x+y) + 4 \end{array}\right] \Rightarrow f(x*y) = f(x)\cdot f(y) \quad \boxed{1pt}$$

3°/ $P_n = x * x * \cdots * x$ n fois.

D'un côté $f(P_n) = P_n - 2$

D'un autre côté: $f(P_n) = f(x * x * \cdots * x) = f(x)\cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x) = [f(x)]^n = (x-$

car f morphisme de groupes d'après ce qui précède

Donc $f(P_n) = (x-2)^n = P_n - 2 \Rightarrow \boxed{P_n = (x-2)^n + 2}$ $\boxed{2pts}$

Exercice 3: sur $\mathbb{R}^2$ $(x,y)\, S\, (x',y') \Leftrightarrow |x'-x| \leq y'-y$.

1°/ S relation d'ordre car:

- réflexive : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x-x| = y-y = 0 \Rightarrow |x-x| \leq y-y \Rightarrow (x,y)\, S\, (x,$
- antisymétrique: Soit $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases} (x,y)\, S\, (x',y') \\ \text{et} \\ (x',y')\, S\, (x,y) \end{cases}$ donc.

$\begin{cases} |x'-x| \leq y'-y \\ \text{et} \\ |x-x'| \leq y-y' \end{cases}$ or $|x'-x| = |x-x'|$ donc $\begin{cases} |x'-x| \leq y'-y \\ \text{et} \\ |x'-x| \leq y-y' \end{cases} \Rightarrow |x'-x| = 0 \Rightarrow x = $

et donc $\begin{cases} 0 \leq y'-y \\ \text{et} \\ 0 \leq y-y' \end{cases} \Rightarrow y = y'$ finalement $(x,y) = (x',y')$

• transitive: Soit $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{cases}(x,y)\, S\, (x',y') \\ \text{et} \\ (x',y')\, S\, (x'',y'')\end{cases}$

Donc: $\begin{cases}|x'-x| \leq y'-y \\ \text{et} \\ |x''-x'| \leq y''-y'\end{cases} \Rightarrow |x'-x| + |x''-x'| \leq y'-y+y''-y' = y''-y.$

$\Rightarrow \underbrace{|x'-x| + |x''-x'|} \leq y''-y.$

or: $|x''-x| = |x''-x'+x'-x| \underset{\text{inéglité triangulaire}}{\leq} \underbrace{|x''-x'| + |x'-x|}$

Donc $|x''-x| \leq y''-y$ i.e. $(x,y)\, S\, (x'',y'')$.

$\begin{cases}(x,y)\, S\, (x',y') \\ \text{et} \\ (x',y')\, S\, (x'',y'')\end{cases} \Rightarrow (x,y)\, S\, (x'',y'').$

• Reflexivité: $\boxed{0{,}5pt}$, • Antisymetrie $\boxed{1{,}5pt}$ • transitivité $\boxed{2pts}$

2°/ S est un ordre partiel car par exemple: $(10,1) \not S (1,2)$ et $(1,2) \not S (10,1)$

$(10,1) \not S (1,2)$ car $|1-10| = 9 > 2-1 = 1$ et $(1,2) \not S (10,1)$ car $|10-1| = 9 > 1-2 = -1$

$\boxed{1pt}$

3°/ $A = \{(1,2)\}$.

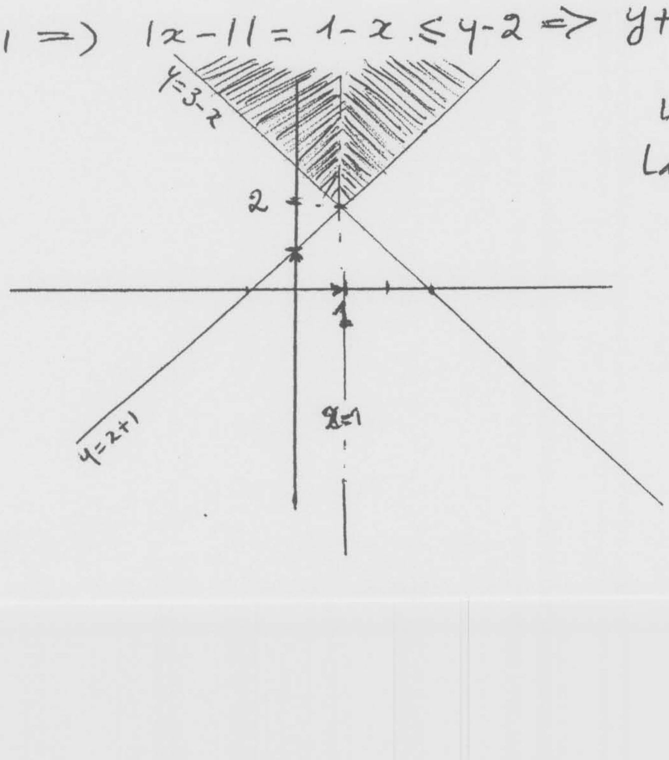
(x,y) est un majorant de A par rapport à l'ordre S ssi: $(1,2)\, S\, (x,y)$.

i.e. $|x-1| \leq y-2$. Donc l'ensemble des majorants de A est donné par:

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-1| \leq y-2\}$.

• Si $x \geq 1 \Rightarrow |x-1| = x-1 \leq y-2 \Rightarrow y-x \geq 1 \Rightarrow y \geq x+1$.

• Si $x \leq 1 \Rightarrow |x-1| = 1-x \leq y-2 \Rightarrow y+x \geq 3 \Rightarrow y \geq 3-x$.



L'ensemble des majorants de A est la partie sombre du dessin; les demi-droits étant incluses.

$\boxed{2pts}$