Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
1ère Année MI
Algèbre I

Examen final

Exercice 1 : ***(05 pts)***

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ comme suit :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y$$

1. ***Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.***
2. ***Soit $a \in \mathbb{R}$ donner $\dot{a}$; la classe d'équivalence de a.***

Exercice 2 : (08 pts)

On munit $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ de la loi $*$ définie comme suit :

$$x * y = xy - 2(x + y) + 6$$

1. ***Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \{2\},*)$ est un groupe commutatif.***
2. ***Montrer que l'application $f: (\mathbb{R} \setminus \{2\},*) \longrightarrow (\mathbb{R}^*,.)$ telle que $f(x) = x - 2$; est un homomorphisme de groupes.***
3. ***On pose : $P_n = \underbrace{x * x * x \dots * x}_{n\,fois}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.***

   Exprimer P_n en fonction de x et de n.

Exercice 3 : ***(07 pts)***

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{S}$ comme suit :

$$(x, y)\mathcal{S}(x', y') \Leftrightarrow |x' - x| \leq y' - y$$

1. ***Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.***
2. ***L'ordre $\mathcal{S}$ est-il total ou partiel ?***
3. ***Soit $A = \{(1,2)\}$ représenter graphiquement l'ensemble des majorants de A relativement à l'ordre $\mathcal{S}$.***

Barème : ***Exercice 1*** ***1.: 1pt + 2.: 4pts***

Exercice 2 ***1.: 5 pts + 2.: 1pt + 3.: 2 pts***

Exercice 3 ***1.: 4 pts + 2.: 1 pt + 3.: 2 pts***