Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
M1 Systèmes dynamiques
Equations fonctionnelles I

Examen final

Exercice 1 *: Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = & \frac{1}{1+y} - \alpha \\ \dot{y} = & x - \beta \end{cases} \quad (S1) \quad \text{où } \alpha > 0 \ \ et \ \ \beta > 0$$

1- ***Trouver une condition sur les paramètres ; pour que le système $(S1)$ possède un point d'équilibre dans le quadrant positif. Par la suite on supposera cette condition est toujours vérifiée.***
2- ***Linéariser le système $(S1)$ au voisinage du point d'équilibre, conclure !***
3- ***Rechercher une intégrale première et l'utiliser pour préciser la qualité du point d'équilibre.***
4- ***Tracer le portrait de phase***

Exercice 2 *: Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x} = & y \\ \dot{y} = & y(1 - 3x^2 - 2y^2) - x \end{cases} \quad (S2)$$

1- ***Linéariser le système $(S2)$ au voisinage de(s) point(s) d'équilibre, conclure !***
2- ***Soit la fonction $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, étudier le signe de $\dot{V}$ le long des trajectoires dans les domaines suivants : $D_1 = \left\{(x,y);\ (x^2 + y^2) > \frac{1}{2}\right\}$ et $D_2 = \left\{(x,y);\ (x^2 + y^2) < \frac{1}{3}\right\}$.***
   En déduire la nature des points d'équilibre.
3- ***Utiliser le théorème de Poincaré-Bendixon pour conclure.***

Exercice 3 *: Considérons l'équation différentielle :*

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \qquad (E)$$

Où f et g sont des fonctions continues telles que :

- i- ***Il existe $a > 0$ tel que $f(x,y) > 0$ pour $(x^2 + y^2) > a$.***
- ii- ***$f(0,0) < 0$.***
- iii- ***$g(0) = 0$ et $g(x) > 0 \ \forall x \neq 0$.***
- iv- ***$G(x) = \int_0^x g(s)ds \quad \lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$***

Montrer que (E) possède une solution périodique.

Facultatif : utiliser l'Exercice3 pour résoudre l'Exercice2.