Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen — *Année 2010-2011*

Faculté des Sciences — *1ère Année MI*

Département de Mathématiques — *Algèbre II*

Examen final

Exercice 1 : *(08 pts)*

Soit l'application linéaire suivante :

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x + y + z, -x - y - z, 0)$$

1. *Déterminer kerf le noyau de f et en déduire dim(kerf).*
2. *f est-elle injective ?*
3. *Sans calculer dim(Imf) ; dire si f est-surjective.*
4. *Donner dim(Imf) ; puis donner une base de Imf.*
5. *Donner dim(kerf ∩ Imf)*

Exercice 2 : *(12 pts)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. *Calculer* A^2 *; puis trouver deux réels* α *et* β *tels que* $A^2 = \alpha A + \beta I$ *; où* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. *Déduire de ce qui précède que la matrice* A *est inversible ; puis donner* A^{-1}.
3. *Retrouver* A^{-1} *par utilisation de la comatrice de* A .
4. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$ *on a* $A^n = U_n A + V_n I$ *; où* $\begin{cases} U_{n+1} = V_n - U_n \\ V_{n+1} = 2U_n \end{cases}$ *avec* $U_0 = 0$ *et* $V_0 = 1$.
5. *Déduire de ce qui précède l'expression de* A^n *en fonction de* n.