– Algèbre I –

– Corrigé de l'Examen final –

Exercice 1: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

1/. f n'est pas injective : en effet :

1ère méthode : il suffit de remarquer que f est paire ; i.e $\forall x \in \mathbb{R}\ f(-x) = f(x)$.

En prenant par exemple $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$ et $f(x_1) = f(x_2) = 0$ et $x_1 \neq x_2$.

2ème méthode : (utile pour la suite de l'exercice).

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1^2-1}{x_1^2+1} = \dfrac{x_2^2-1}{x_2^2+1} \Rightarrow (x_1^2-1)(x_2^2+1) = (x_2^2-1)(x_1^2+1)$

$\Rightarrow 2(x_1^2 - x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $\underline{x_1 = -x_2}$.

En prenant par exemple $x_1 = -1$ et $x_2 = 1$, $f(x_1) = f(x_2) = 0$ et $x_1 \neq x_2$ (02pts)

2/. f n'est pas surjective. en effet soit $y \in \mathbb{R}$.

$y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow (x^2+1)y = x^2-1 \Rightarrow (1-y)x^2 = 1+y$.

- Si $y = 1$ alors $1 = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1 = x^2-1 \Rightarrow 1 = -1$ ce qui est absurde

Donc $y = 1$ n'admet pas d'antécédant par f, d'où f n'est pas surjective.

- Si $y \neq 1$ (utile pour la suite de l'exercice).

$y = f(x) \Rightarrow (1-y)x^2 = 1+y \Rightarrow x^2 = \dfrac{1+y}{1-y}$. cette équation possède des solutions ssi $\dfrac{1+y}{1-y} \geq 0$ et $y \neq 1$. i.e $y \in [-1, 1[$; et dans ce cas $x = \pm\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$

mais $\forall y \notin [-1, 1[$ l'équation $y = f(x)$ ne possède pas solution réelle.

Donc f n'est pas surjective (02pts)

3/. D'après l'étude précédente il suffit de choisir

$A = [0, +\infty[$ (ou $A =]-\infty, 0]$) (01pt)

et $B = [-1, 1[$ (01pt)

pour que $g : A \longrightarrow B$, $x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ soit bijective

Exercice 2: Sur $\mathbb{R}^2$, $(x, y)\, S\, (x', y') \Leftrightarrow x \leq x'$ et $y \leq y'$.

1/. S est une relation d'ordre : reflexive, antisymetrique et transitive (02pts)

2/. l'ordre est partiel en effet par exemple.

$(1, 10) \not{S} (3, 5)$ car $10 > 5$ (02pts)

et $(3, 5) \not{S} (1, 10)$ car $3 > 1$.

$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \; ; \; x>5 \text{ et } -1<y\leqslant 1\} \left(= \left]5,+\infty\right[\times \left]-1,1\right]\right)$.

• (α,β) majorant de $E \Rightarrow \forall (x,y)\in E, \; (x,y)\, S\, (\alpha,\beta)$.

$\Rightarrow \forall (x,y)\in \left]5,+\infty\right[\times\left]-1,1\right] \; ; \; x\leqslant\alpha$ et $y\leqslant\beta$

or il n'existe pas de $\alpha\in\mathbb{R}$, tel que $\forall x\in\left]5,+\infty\right[\;,\; x\leqslant\alpha$.

Donc E ne possède pas de majorant, et donc $\operatorname{Sup}E$ n'existe pas (01pt)

• (α',β') minorant de $E \Rightarrow \forall (x,y)\in E \; (\alpha',\beta')\, S\,(x,y)$.

$\Rightarrow \forall (x,y)\in\left]5,+\infty\right[\times\left]-1,1\right] \;,\; \alpha'\leqslant x$ et $\beta'\leqslant y$.

$\Rightarrow \alpha'\leqslant 5$ et $\beta'\leqslant -1$.

Donc par exemple : $(4,-2)$, $(0,-10)$ sont des minorants

et $\operatorname{Inf}E = (5,-1)$ (01pt)

(Remarque $\operatorname{Min}E$ n'existe pas car $\operatorname{Inf}E\notin E$).

<u>EXERCICE 3</u> : Sur $\mathbb{R}$, $x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow |x|-x = |y|-y$.

1./ $\mathcal{R}$ relation d'équivalence : reflexive, symetrique, transitive (02pts)

2./ $a\in\mathbb{R}$, $\dot{a} = \{x\in\mathbb{R},\; x\,\mathcal{R}\,a\} = \{x\in\mathbb{R},\; a\,\mathcal{R}\,x\}$; $\quad x\,\mathcal{R}\,a \Leftrightarrow |x|-x = |a|-a$

<u>1er Cas</u> : $a\geqslant 0$ alors $|a|=a$.

$x\,\mathcal{R}\,a \Rightarrow |x|-x = |a|-a = a-a = 0 \Rightarrow |x|-x=0 \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x\geqslant 0$.

Donc $\dot{a} = \{x\in\mathbb{R},\; x\geqslant 0\} = [0,+\infty[$.

<u>2ème Cas</u> : $a<0$ alors $|a| = -a$.

$x\,\mathcal{R}\,a \Rightarrow |x|-x = |a|-a \Rightarrow |x|-x = -2a$.

• Si $x\geqslant 0$. $|x|=x$ on obtient $x-x=-2a \Rightarrow a=0$ contradiction $\underline{\underline{a<0}}$

• Si $x<0$ $|x|=-x$ on obtient $-x-x=-2a \Rightarrow -2x=-2a \Rightarrow x=a$.

Donc $\dot{a} = \{a\}$.

En conclusion : si $a\geqslant 0$ $\dot{a} = [0,+\infty[$ et si $a<0$ $\dot{a}=\{a\}$ (02pts)

3./ Ensemble quotient $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}} = \{\dot{a},\; a\in\mathbb{R}\} = \{[0,+\infty[,\; \{a\}_{a<0}\}$ (02pts)

4./ Il faut remarquer que $x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow |x|-x = |y|-y \Leftrightarrow |x|-x+4 = |y|-y+4 \Leftrightarrow g(x)=g(y)$

Donc $\dot{x} = \{x\in\mathbb{R},\; g(x)=g(y)\}$.

d'un autre coté (g injective) $\Leftrightarrow (g(x)=g(y) \Rightarrow x=y)$ $\Big\}\Rightarrow g$ injective $\Leftrightarrow \dot{x}=\{x\}$.

Donc $I =]-\infty,0[$ auquel il faut adjoindre un unique représentant de la classe $[0,+\infty[$; Comme I est un intervalle $I =]-\infty,0[\cup\{0\} =]-\infty,0]$

$$I =]-\infty,0]$$ (02pts)