Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen *Année 2010-2011*

Faculté des Sciences *1ère Année MI*

Département de Mathématiques *Algèbre I*

Examen final

***Exercice 1 :** (06 pts)*

Soit l'application f définie comme suit

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1}}$$

1. *f est-elle injective ?*
2. *f est-elle surjective ?*
3. *Trouver les plus grands intervalles possibles $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ tels que l'application :*

$$\boldsymbol{g}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{1}}{\boldsymbol{x}^2 + \mathbf{1}}$$

Soit une application bijective.

***Exercice 2 :** (06 pts)*

On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{S}$ par :

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathcal{S}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}') \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}' \ \boldsymbol{et} \ \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{y}'$$

1. *Vérifier que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.*
2. *L'ordre $\mathcal{S}$ est-il total ou partiel?*
3. *Soit*

$$\boldsymbol{E} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2; \ \ \boldsymbol{x} > 5 \ et \ -\mathbf{1} < y \leq 1\}$$

Donner –s'ils existent- deux majorants, deux minorants, la borne inférieure et la borne supérieure de E.

***Exercice 2 :** (08 pts)*

On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\boldsymbol{x}\mathcal{R}\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} - |\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{y} - |\boldsymbol{y}|$$

1. *Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer $\dot{a}$; la classe d'équivalence du réel a.*
3. *Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$.*
4. *En utilisant ce qui précède, trouver le plus grand intervalle possible $I \subset \mathbb{R}$ pour que l'application*

$$\boldsymbol{g}: \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - |\boldsymbol{x}| + \mathbf{4}$$

Soit injective.