Université de Tlemcen.
Département de Génie Electrique et Electronique.
$1^{ère}$ **année Génie Industriel.**

Année Universitaire : 2015/2016.
Outils Mathématiques.

Examen Final

Exercice-1 : (05 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$Z^{6n} - iZ^{3n} - 1 - i = 0.$$

Exercice-2 : (05 points)

Calculer ce qui suit :

1. $I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+3}\,dx$ 2. $I_2 = \int \frac{(\text{arctg(x)})^2}{x^2+1}\,dx$ 3. $I_3 = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx.$

Exercice-3 : (05 points)

Trouver une relation entre I et J, puis calculer I et J

$$I = \int_0^{\pi} x^2 \cos^2(x)\,dx, \qquad J = \int_0^{\pi} x^2 \sin^2(x)\,dx.$$

Exercice-4 : (05 points)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} xy' \ln(x) - y = (\ln(x))^2 \\ y(\mathrm{e}) = 3. \end{cases}$$

Correction

Exercice 1 : (05 points)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, pour résoudre l'equation
$$Z^{6n} - iZ^{3n} - 1 - i = 0.$$
On pose $w = Z^{3n}$, on obtient alors léquation :
$$w^2 - iw - 1 - i = 0.$$
$\Delta = i^2 + 4 + 4i = (2+i)^2$, ainsi
$$w_1 = 1+i, w_2 = -1 \text{ sont des solutions de l'equation } w^2 - iw - 1 - i = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{point})$$
pour obtenir les solutions de l'equation
$$Z^{6n} - iZ^{3n} - 1 - i = 0.$$
Il suffit de chercher les racines w_1, w_2 ainsi que $w = re^{i\theta}$
$$r^{3n}e^{i3n\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
alors $|z|^{3n} = \sqrt{2}$ et $Arg(z^{3n}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ alors $|z| = 2^{\frac{1}{6n}}$ et $Arg(z) = \frac{\pi}{12n} + \frac{2k\pi}{3n}, k = 0,1,2,3,\ldots,3n-1$
$z_0 = 2^{\frac{1}{6n}}e^{i\frac{\pi}{12n}}, z_1 = 2^{\frac{1}{6n}}e^{i\frac{9\pi}{12n}}, \ldots, z_{3n-1} = 2^{\frac{1}{6n}}e^{i\frac{24n\pi-7}{12n}}$ ....(1.5points)
D'autre part,
$Z^{3n} = -1 = e^{i\pi}$ alors $|z|^{3n} = 1, Arg(z) = \frac{\pi}{3n} + \frac{2k\pi}{3n}, k = 0,1,2,3,\ldots,3n-1,$
$z'_0 = e^{i\frac{\pi}{3n}}, z'_1 = -1, \ldots, z'_{3n-1} = e^{i\frac{\pi(6n-1)}{3n}}$ ....(1.5points)
Alors notre equation de départ possède comme solutions
$$z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{3n-1}, z'_0, z'_1, \ldots, z'_{3n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{point})$$

Exercice-2 : (05 points)

1. $I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+3}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}dx - \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+3}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+3| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}dx + c$, et $\int \frac{1}{x^2+x+3}dx = \frac{1}{(\frac{2x+1}{2})^2+\frac{11}{4}}dx = \frac{4}{11}\frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{11}})^2+1}dx$, on pose $t = \frac{2x+1}{\sqrt{11}}$, $\int \frac{2}{\sqrt{11}(t^2+1)}dt = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}) + c$ donc $I_3 = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+3| - \frac{3}{\sqrt{11}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}) + c$..(1.5 points)
2. $I_2 = \int \frac{(arctg(x))^2}{x^2+1}dx$, on pose $t = arctg(x)$ alors $dt = \frac{dx}{x^2+1}$, donc $I_2 = \int t^2 dt$ et par suite $I_2 = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}(arctg(x))^3 + c$..(1.5 points).
3. $I_3 = \int \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$, on pose $y = \sqrt{x-1}$ et $x = y^2+1$ donc $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$, donc $I_3 = \int \frac{2y^2-2+2}{y^2+1}dx = 2y - \int \frac{2}{y^2+1}dx = 2y - 2[\arctan(y)] = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan(\sqrt{x-1}) + c$..(2 points).

Exercice-3 : (05 points)
Trouver une relation entre I et J, puis calculer I et J
$$I = \int_0^\pi x^2\cos^2(x)\,dx, \qquad J = \int_0^\pi x^2\sin^2(x)\,dx.$$
Commencons par calculer
$$I + J = \int_0^\pi x^2(\cos^2(x)+\sin^2(x))\,dx = \int_0^\pi x^2\,dx = \frac{1}{3}[x^3]_0^\pi = \frac{1}{3}\pi^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1\text{point})$$
$$I - J = \int_0^\pi x^2(\cos^2(x)-\sin^2(x))\,dx = \int_0^\pi x^2\cos^2(2x)\,dx$$
on peut poser $t = 2x$ on trouve que
$$I - J = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} t^2\cos^2(t)\,dx$$

par deux fois intgration par partie, on trouve :

$$\frac{1}{8}\int_0^{2\pi} t^2\cos^2(t) = \frac{1}{8}\left[[t^2\sin(t)]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} t\sin(t)\,dt\right] = \frac{1}{8}\left[[t^2\sin(t) - 2(-t\cos(t)+\sin(t))]_0^{2\pi}\right] = \frac{1}{2}\pi \text{..................(2points)}$$

Alors on peut déduire que

$$I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\pi^3 = \frac{2\pi^3+3\pi}{12} \text{...(1point)}$$

$$J = \frac{-\pi}{4} + \frac{1}{6}\pi^3 = \frac{2\pi^3-3\pi}{12} \text{...(1point)}$$

Exercice-4 : (05 points)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} xy'\ln(x) - y = (\ln(x))^2 \\ y(\mathrm{e}) = 3. \end{cases}$$

On commence par la résolution de l'equation sans second membre

$$xy'\ln(x) - y = 0 \text{ alors } \frac{y'}{y} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

, et par suite

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x\ln(x)},$$

après intégration

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x\ln(x)} \Longrightarrow \ln|y| = \int \frac{dx}{x\ln(x)}$$

on pose $t = \ln(x)$ donc $dt = \frac{dx}{x}$ alors

$$\ln|y| = \int \frac{dx}{x\ln(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln(x)| + c \text{...................................(1.5 points)}$$

On obtient finalement que $y(x) = K\ln(x)$ pour tout $K \in \mathbb{R}$ est une solution générale de l'équation sans second membre
Recherche d'une solution particulière de l'equation avec second membre, on peut remarquer que $y_*(x) = (\ln(x))^2$ est une solution particulière...................................(1.5 points).
N.B : On peut utiliser la méthode de variation de la constante pour la recherche de solution particulière.
Alors la solution générale est

$$y(x) = K\ln(x) + (\ln(x))^2$$

Pour savoir la valeur de K, on utilise la condition initiale $y(\mathrm{e}) = 3$, on aura

$$y(\mathrm{e}) = K + 1 = 3 \Rightarrow K = 2 \text{...................................(1point)}$$

La solution générale est :

$$y(x) = 2\ln(x) + (\ln(x))^2 \text{.....................(1point).}$$