Université de Tlemcen.
Département de Génie Electrique et Electronique.
1ère Année Génie Industriel.

Année Universitaire : 2015/2016.
Analyse Mathématique.

Examen Final

Exercice 1 : (6 pts)

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+5)^{x-2}}{(x+1)^{x+1}}.$$

N.B : L'utilisation de la Règle de l'Hôpital n'est pas autorisée.

Exercice-2 : (6 pts)

1. Pour quelle(s) valeur(s) du réel α la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{4x^2+4} & \text{si } x > 0 \\ \beta x - \frac{1}{4} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

   est-elle prolongeable par continuité en 0 ? On précisera alors ce prolongement que l'on notera par F.

2. Pour quelle valeur de β, la fonction F est-elle dérivable en 0 ?

Exercice-3 : (8 pts)

Soit $a \in I\!R_*^+$, on considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{a}{u_n}\Big),$$

et on note $(v_n)_{n\in N}$ la suite définie par :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

1. Montrer que, pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n^2$.
2. Calculer v_n en fonction de v_0 et montrer que $|v_0| < 1$. En déduire que v_n converge vers 0.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}$.
4. Calculer les deux premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in N}$, pour $u_0 = 1$ et $a = 2$.

Correction

Exercice 1 : (6 pts)

1. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} =$ (2 pts)
   — Si $\alpha=0$, $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = +\infty$
   — Si $\alpha\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \lim\limits_{x\to\alpha} [\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} + \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}}]$

$$= \lim_{x\to\alpha}[\frac{x-\alpha}{\sqrt{x^2-\alpha^2(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}} + \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}}] = \lim_{x\to\alpha}[\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x+\alpha(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}} + \frac{1}{\sqrt{x+\alpha}}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x} =$ (2 pts)
   — $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x+2 = 2$
   — $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} x-2 = -2$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+5)^{x-2}}{(x+1)^{x+1}} =$ (2 pts)
   $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{x+5}{x+1})^x \dfrac{1}{(x+1)(x+5)^2}$
   $= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x(1+\frac{5}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}\right)^x \dfrac{1}{(x+1)(x+5)^2} = 0$

Exercice-2 : (6 pts)

1. (3 pts)
   — $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-\alpha}{4x^2+4} = \dfrac{-\alpha}{4}$
   — $\lim\limits_{x\to 0^-} \beta x - \dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{4}$
   Pour que f soit prolongeable par continuité en 0 il faut que $\dfrac{-\alpha}{4} = \dfrac{-1}{4}$ donc $\alpha = 1$.
   On définie la fonction F (la fonction prolongeable de f)

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4x^2+4} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{-1}{4} & \text{si } x=0 \\ \beta x - \dfrac{1}{4} & \text{si } x<0, \end{cases}$$

2. La valeur de β pour que F soit dérivable en 0 (3 pts)
   — $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{x-1}{4x^2+4}+\frac{1}{4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+x}{4x(x^2+1)} = \dfrac{1}{4}$
   — $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\beta x - \frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\beta x}{x} = \beta$
   Pour que f soit dérivable en 0 il faut que $\beta = \dfrac{1}{4}$.

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4x^2+4} & \text{si } x>0 \\ \dfrac{-1}{4} & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4} & \text{si } x<0, \end{cases}$$

Exercice-3 : (8 pts) Soit $a \in I\!R_*^+$, on considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\big(u_n + \frac{a}{u_n}\big),$$

et on note $(v_n)_{n\in N}$ la suite définie par :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

1. Démonstration par réccurence que : , pour tout entier n, $v_{n+1} = v_n^2$ $\quad (P_n)$ (2 pts)
   — Vérification : $n = 0$, $v_1 = v_0^2$
   — Hypothése de récurrence : (P_n).
   — Résultat (P_{n+1}).

2. (3 pts)
   — pour tout entier n, $v_n = (v_0)^{2n}$.
   — $|v_0| < 1$, (par définition $|v_n| = |\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}| < \frac{u_n}{u_n + \sqrt{a}} < \frac{u_n}{u_n} = 1$).
   — $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} (v_0)^{2n} = 0$ (Car $|v_0| < 1$).

3. (2 pts)

   — pour tout entier n, $u_n = \dfrac{\sqrt{a}(v_n + 1)}{1 - v_n}$.
   — $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{a}(v_n + 1)}{1 - v_n} = \sqrt{a}$ (Car $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$)

4. $v_0 = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}, v_1 = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}$ (1 pt)