Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2015-2016
1ère Année
Algèbre

Examen final

Exercice 1 : (08 points) Soit l'application f définie comme suit :

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?

Soit l'application g définie comme suit :

$$g:]-2, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$
$$x \mapsto g(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

1. g est-elle injective ?
2. g est-elle surjective ?

Exercice 2 : (07 points) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer $det(A)$

Soient $a,\ b,\ c,\ d$ des réels donnés, soit la matrice $B = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

2. Calculer $det(B)$
3. Résoudre l'équation $det(B) = 0$

Exercice 3 : (05 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul donné, soient $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$ $(n+1)$ nombres réels dans $[0, 1]$ tels que

$$0 \le x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1$$

Montrer par l'absurde que

$$\exists i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}\ tel\ que\ |x_i - x_{i-1}| \le \frac{1}{n}$$

Examen d'Algèbre

– Corrigé –

Exercice 1 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4}.$$

1- Injection :

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 3x_1 + \frac{9}{4} = x_2^2 + 3x_2 + \frac{9}{4}$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 + 3(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 3(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 3) = 0.$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2 - 3.$

Soit par exemple : $x_1 = -3$ et $x_2 = 0$ alors $f(x_1) = f(-3) = \frac{9}{4}$; $f(x_2) = f(0) = \frac{9}{4}$

ainsi $f(x_1) = f(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$ f n'est pas injective. (02pts)

2- Surjection :

Soit $y \in \mathbb{R}$; $y = f(x) \Rightarrow y = x^2 + 3x + \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} - y = 0$

$\Delta = 9 - 4(\frac{9}{4} - y) = 4y$ ainsi $\Delta \geq 0$ ssi $y \geq 0$.

Donc si $y < 0$ l'équation $y = f(x)$ ne possède pas de solution

Soit par exemple : $y = -\frac{3}{4} < 0$; $y = f(x) \Rightarrow -\frac{3}{4} = x^2 + 3x + \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{12}{4} = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 3 = 0.$

$\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$, $y = f(x)$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{R}$

Donc f n'est pas surjective. (02pts)

Remarque : l'exercice est déjà facile ; mais en remarquant que :

$$f(x) = x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$$ l'exercice devient encore plus facile !

$$g :]-2, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[.$$

1- Injection :

Soient $x_1, x_2 \in]-2, +\infty[$; $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2 - 3$ (le même calcul que celui de f)

prenons par exemple $x_1 = -\frac{7}{5} \in]-2, +\infty[$; $x_2 = -\frac{8}{5} \in]-2, +\infty[$

$f(x_1) = f(-\frac{7}{5}) = \frac{49}{25} - \frac{21}{5} + \frac{9}{4} = \frac{1}{100}$; $f(x_2) = f(-\frac{8}{5}) = \frac{64}{25} - \frac{24}{5} + \frac{9}{4} = \frac{1}{100}$. (02pts)

$f(x_1) = f(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$ Donc f n'est pas injective.

Remarques : 1- Il est essentiel de choisir $x_1, x_2 \in]-2, +\infty[$ Donc $x_1 > -2$ et $x_2 > -2$

2- Pour que g soit injective il aurait fallu prendre pour ensemble de départ $[-\frac{3}{2}, +\infty[$ par exemple.

2. Surjection :

Soit $y \in [0,+\infty[$; $y = g(x) \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} - y = 0$

$\Delta = 4y \geq 0$ (c'est le même calcul que celui de f ; mais ici $y \in [0,+\infty[$; $y \geq 0$)

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{4y}}{2} = -\frac{3}{2} - \sqrt{y} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{4y}}{2} = -\frac{3}{2} + \sqrt{y}$$

reste à vérifier qu'au moins une des deux solution st dans l'ensemble de départ $]-2,+\infty[$; en effet $x_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{y} \geq -\frac{3}{2} > -2$

ainsi $x_2 \in]-2,+\infty[$. Donc g est surjective. (02pts)

Exercice 2 :

1-
$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; \quad \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3 - 3 + 0 + 0 = -6$$ (02pts)

2.
$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array}$$
$$B = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} ; \quad \det(B) = a\begin{vmatrix} b & b & b \\ b & c & c \\ b & c & d \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & c & c \\ a & c & d \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & c \\ a & b & d \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & b & b \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = a\left[\left(b(cd-c^2) - b(bd-bc)\right) - \left(a(cd-c^2) - b(ad-ac)\right)\right] + 0 + 0.$$
$$= a\left[bc(d-c) - b^2(d-c) - ac(d-c) + ab(d-c)\right]$$
$$= a(d-c)\left[bc - b^2 - ac + ab\right] = a(d-c)\left[b(c-b) - a(c-b)\right]$$
$$= a(d-c)(c-b)(b-a).$$

$$\boxed{\det(B) = a(d-c)(c-b)(b-a)}$$ (03pts)

3. $(\det(B) = 0) \Rightarrow (a = 0$ ou $d = c$ ou $c = b$ ou $a = b)$. (02pts)

EXERCICE 3 : $n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$.

Montrons par l'absurde que

$$\exists i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\} \; ; \; |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{n}.$$

Supposons par l'absurde que :

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\} \; ; \; |x_i - x_{i-1}| > \frac{1}{n}. \quad \text{———} \quad (02pts)$$

observons que $x_{i-1} \leq x_i \Rightarrow |x_i - x_{i-1}| = x_i - x_{i-1}$

$$x_1 - x_0 > \frac{1}{n}$$
$$x_2 - x_1 > \frac{1}{n}$$
$$x_3 - x_2 > \frac{1}{n}$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1} - x_{n-2} > \frac{1}{n}$$
$$x_n - x_{n-1} > \frac{1}{n}$$

en additionnant toutes ces inégalités on obtient

$$(x_1 - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + (x_3 - \cancel{x_2}) + \cdots + (\cancel{x_{n-1}} - \cancel{x_{n-2}}) + (x_n - \cancel{x_{n-1}}) > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

$x_n - x_0 > n \cdot \frac{1}{n} = 1$ donc $(x_n - x_0) > 1$ ce qui est impossible

Car : $0 \leq x_0 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. (03pts)