Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Productique

Année 2013-2014
1ère Année
Algèbre

Examen final

***Exercice1 :** (07 pts) Soit α un paramètre réel on considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Pour quelles valeurs du paramètre α, la matrice A est-elle inversible ?*
2. *Lorsque cela est possible, calculer A^{-1}. (On rappelle que $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^{t}com(A)$)*
3. *En déduire la solution du système* $\begin{cases} y + z = 4 \\ 2x + 2y = 16 \\ 3x + 3z = 12 \end{cases}$

***Exercice2 :** (07 pts) Soit les deux applications suivantes*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

et

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad x \mapsto g(x) = (x^2, -x^2)$$

1. *f est-elle injective ? f est-elle surjective ?*
2. *g est-elle injective ? g est-elle surjective ?*
3. *Calculer $(f \circ g)(x)$.*
4. *$(f \circ g)$ est-elle injective ? $(f \circ g)$ est-elle surjective ?*

***Exercice3 :** (06 pts) Soit la matrice* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$*, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a*

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n + 1}{2} & \frac{1 - (-1)^n}{2} & \frac{1 - (-1)^n}{2} \\ \frac{1 - 2^n}{2} & \frac{1 + 2^n}{2} & \frac{1 - 2^n}{2} \\ \frac{2^n - (-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n - 2^n}{2} & \frac{2^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

Barème :
Exercice1 : 7 points = 1. 02pts ; 2. 02pts ; 3. 03pts .
Exercice2 : 7 points = 1. 02pts ; 2. 02pts ; 3. 01pt ; 4. 02pts .
Exercice3 : 6points .