THESE

Présentée à l'université de Tlemcen

Faculté des sciences

Département de mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de ***Magister***

Option: ***Analyse fonctionnelle***

Par: MIRI Sofiane El-Hadi

Intitulée

Espaces de Sobolev associés à un problème de Sturm-Liouville

Soutenue le : 30 septembre 2000

devant le jury:

Président:	*M.Mohammed BENALILI*	*(M.C à l'université de Tlemcen)*
Rapporteur:	*M.Hacen DIB*	*(M.C à l'université de Tlemcen)*
Examinateurs:	*M.Sidi Mohammed BOUGUIMA*	*(M.C à l'université de Tlemcen)*
	M.Mustapha YEBDRI	*(M.C à l'université de Tlemcen)*

Table des Matières

Introduction

En nous inspirant du travail de Mme GUILLEMOT-TEISSIER [15], nous nous sommes proposés de construire des espaces fonctionnels à partir des problèmes de Sturm-Liouville sur un intervalle I (espaces que nous appelerons espaces de Sobolev associés à un problème de Sturm-Liouville). C'est en cherhant un critère de régularité pour ces espaces que nous avons été amené à étudier le comportement asymptotique des valeurs et fonctions propres, domaine où la littérature est abondante et relativement récente lorsque I est borné, nous citerons par exemple FULTON,C,T;PRUESS,S,A [14], HARRIS,B,J [16], cependant les résultats se font plus rares dès que l'intervalle I est non borné, donc pour tout les problèmes réguliers et pour certains problèmes singuliers nous sommes arrivés à trouver le critère de régularité initialement recherché ceci notamant grâce au fait que les valeurs propres λ_n se comportent comme n^2 pour les problèmes réguliers, et comme une certaine puissance de n pour la plupart des problèmes singuliers. La suite naturelle à ce travail etait de trouver un champ d'application à ces espaces, c'est ce que nous avons essayer de faire en y résolvant des équations voir des systèmes différentiels, ceci en nous basant sur les travaux de DE FIGUEIREDO,D [13], et de KAVIAN,O [20]. Nous nous sommes limités ici aux problèmes de Sturm-Liouville et donc au cas monovariable, mais cela n'est pas une nécessité, il suffit que le problème considéré nous offre des qualités spectrales similaires à celles fournies par les problèmes de Sturm-Liouville pour que le même travail soit repris.

Chapitre 1

Comportement asymptotique

Dans ce premier chapitre nous allons donner les définitions et les propriètés essentielles associées aux problèmes de Sturm-Liouville, ainsi que le comportement asymptotique des valeurs propres et fonctions propres associés à ce type de problème.

1.1 Problèmes de Sturm-Liouville réguliers

Définition 1.1 : *On désigne sous le vocable "problème de Sturm-Liouville régulier", l'étude des solutions d'une équation différentielle du type:*

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] \pm q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \tag{1.1}$$

à laquelle on ajoute des conditions aux limites du types

$$\begin{cases} a_0y(a) + a_1y'(a) = 0 \\ b_0y(b) + b_1y'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

a et b étant finis, où p est une fonction strictement positive, de classe C^1 sur le compact $[a, b]$, q une fonction continue sur $[a, b]$, et ρ une fonction strictement posi-

tive, continue sur $[a,b]$. *Les conditions (1.2) sont dites séparées, la première faisant intervenir le point* a *et la seconde le point* b.

Comme $\rho(x) > 0$; le problème ((1.1),(1.2)) peut être interprété comme étant la recherche des valeurs propres et des fonctions propres de l'opérateur différentiel l défini par:

$$ly = \frac{1}{\rho(x)}\left[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}y\right) \pm q(x)y\right] \tag{1.3}$$

sous les conditions (1.2).

Exemple 1 : *Soit le problème régulier de Sturm-Liouville*

$$\begin{cases} ly = -y'' = \lambda y \\ y(0) = y(a) = 0 \ldots 0 < a < \infty \end{cases} \tag{1.4}$$

(ici $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 1$)

Les fonctions propres issues de (1.4) sont (après normalisation) $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$; et les valeurs propres associées $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$. Nous avons choisi cet exemple pour son aspect simple et illustratif , mais aussi parcequ'il fera référence par la suite.

Les problèmes de Sturm-Liouville ont une interprétation, voir une origine physique; en effet le mouvement d'une corde vibrante non-homogène est modélisé par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

où $u(x,t)$ désigne la position à l'instant t de la vibration au point x; $p(x)$ désigne la constante d'élasticité multipliée par la surface de la section de la corde (d'où l'hypothèse $p(x) > 0$); et $\rho(x)$ désigne la masse de la corde par unité de longueur (d'où l'hypothèse $\rho(x) > 0$).

L'équation (1.5) se résoud par séparation des variables, soit en posant $u(x,t) = y(x)z(t)$, puis en substituant dans (1.5) et en mettant les fonctions de x d'un côté et celles de t de l'autre on obtient alors:

$$\frac{(py')'}{\rho y} = \frac{\ddot{z}}{z}$$

où "$'$" désigne la dérivation par rapport à x et "$\cdot$" désigne la dérivation par rapport à t. Cette dernière équation ne peut se réaliser que si les deux membres sont égaux à la même constante λ ce qui donne les deux nouvelles équations

$$\begin{aligned} (py')' + \lambda\rho y &= 0 \\ \ddot{z} + \lambda z &= 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

On reconnait dans (1.6) l'équation impliquée dans les problèmes de Sturm-Liouville.

Les conditions aux limites ont elles aussi une interprétation physique; par exemple $\begin{cases} y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$ signifie que la corde a des extrémités liées.

Proposition 1.1 *Les valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ issues du problème régulier de Sturm-Liouville ((1.1),(1.2)) sont toutes simples.*

preuve. Soit λ une valeur propre issue de ((1.1),(1.2)) et soit ϕ_1, et ϕ_2 deux fonctions propres qui lui sont associées; nous allons montrer que ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement dépendantes, pour cela il suffit de montrer que leur wronskien $w(\phi_1,\phi_2,x)$est nul.

-Rappelons que $w(\phi_1,\phi_2,x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} = \phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x)$, et qu'il est soit nul soit non nul et ceci pour tout x-

Comme ϕ_1,ϕ_2 vérifient (1.1) nous avons:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\phi_1(x)\right]+q(x)\phi_1(x) &= \lambda\rho(x)\phi_1(x) \\ -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\phi_2(x)\right]+q(x)\phi_2(x) &= \lambda\rho(x)\phi_2(x) \end{aligned}$$

multiplions la première equation par ϕ_2 et la seconde par ϕ_1 puis faisons la différence des deux equations, ce qui donne:

$$\phi_1(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\phi_2(x)\right]-\phi_2(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\phi_1(x)\right]=0$$

ou encore

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\phi_1(x)\frac{d}{dx}\phi_2(x)-p(x)\phi_2(x)\frac{d}{dx}\phi_1(x)\right]=0$$

soit que

$$p(x)\phi_1(x)\frac{d}{dx}\phi_2(x)-p(x)\phi_2(x)\frac{d}{dx}\phi_1(x)\equiv c\in IR$$

i.e

$$p(x)w(\phi_1,\phi_2,x)=p(a)w(\phi_1,\phi_2,a)=c$$

comme ϕ_1 et ϕ_2 vérifient (1.2), en remplaçant $\phi_1'(a)$ et $\phi_2'(a)$ par leurs valeurs respectives on a que

$$w(\phi_1,\phi_2,a)=0$$

donc ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement dépendantes. ■

1.2 Fonction de Green

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} ly = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = f(x) \\ \begin{cases} a_0y(a) + a_1y'(a) = 0 \\ b_0y(b) + b_1y'(b) = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{1.7}$$

Si le problème homogène

$$ly = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0$$

associé aux conditions aux limites

$$\begin{cases} a_0y(a) + a_1y'(a) = 0 \\ b_0y(b) + b_1y'(b) = 0 \end{cases}$$

n'a d'autres solutions que $y \equiv 0$; il va alors exister une fonction dite fonction de Green notée $G(x,t)$ construite comme suit: soit f_1 vérifiant $lf_1 = 0$, $f_1(a) = a_1$, et $f_1'(a) = -a_0$, et soit f_2 vérifiant $lf_2 = 0$, $f_2(b) = b_1$, et $f_1'(b) = -b_0$, alors

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{-1}{p(x)w(f_1,f_2,x)} f_1(x)f_2(t) \text{ si } x \leq t \\ \frac{-1}{p(x)w(f_1,f_2,x)} f_1(t)f_2(x) \text{ si } t \leq x \end{cases}$$

où $w(f_1,f_2,x) = (f_1f_2' - f_1'f_2)(x)$; le fait que $p(x)w(f_1,f_2,x) \neq 0$ est dû à l'indépendance entre f_1 et f_2 et que $p(x) > 0$. On veut à présent résoudre l'équation $ly = f(x)$; pour cela on résoud l'équation homogène, puis on procède par variation de la constante:

$$ly = 0 \Rightarrow y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_1(x)$$

$$ly = f(x) \Rightarrow y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_1(x)$$

où $c_1(x)$ et $c_2(x)$ sont solution du système

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = -\frac{f(x)}{p(x)} \end{cases}$$

soit

$$c_1'(x) = \frac{1}{w\,(y_1, y_2, x)} \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ -\frac{f(x)}{p(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{y_2(x)f(x)}{p(x)w\,(y_1, y_2, x)}$$

et

$$c_2'(x) = \frac{1}{w\,(y_1, y_2, x)} \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & -\frac{f(x)}{p(x)} \end{vmatrix} = \frac{-y_1(x)f(x)}{p(x)w\,(y_1, y_2, x)}$$

d'où

$$c_1(x) = -\frac{1}{p(x)w\,(y_1, y_2, x)} \int_x^a y_2(\tau)f(\tau)d\tau$$

et

$$c_2(x) = -\frac{1}{p(x)w\,(y_1, y_2, x)} \int_b^x y_1(\tau)f(\tau)d\tau$$

soit que

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_1(x) \\ &= \int_a^b G\,(x,t)\,f(t)dt \end{aligned}$$

la dernière égalité montre que l'opérateur intégral dont le noyau est la fonction de Green n'est autre que l'inverse de l'opérateur l. Parmi les propriétés de la fonction de Green on retiendra particulièrement deux:

i) $G(x,t) = G(t,x)$ (symétrie).

ii) $G(x,t)$ est continue sur $[a,b] \times]a,b[$.

1.2.1 Fonction de Green modifiée (généralisée)

On considère le problème (1.7), et on suppose que le problème homogène qui lui est associé admet une solution non identiquement nulle f_0 , pour la fixer nous supposerons qu'elle vérifie $\int_a^b f_0^2(t)dt = 1$, si de plus l'équation

$$ly = 0$$

à pour solution générale

$$y(x) = c_1 f_0(x) + c_2 y_2(x)$$

où y_2 est telle que

$$w\left(f_0, y_2, x\right) \neq 0$$

il va alors exister une fonction dite fonction de Green modifiée ou généralisée notée $G_M(x,t)$ définie par:

$$G_M(x,t) = \begin{cases} \frac{-1}{p(x)w(f_0,y_2,x)} f_0(x)y_2(t) \text{ si } x \leq t \\ \frac{-1}{p(x)w(f_0,y_2,x)} f_0(t)y_2(x) \text{ si } t \leq x \end{cases}$$

dans ce cas le problème (1.7) possède une solution *ssi* $\int_a^b f_0(x)f(x)dx = 0$, et cette solution est donnée par

$$y(x) = kf_0(x) + \int_a^b G_M\left(x,\tau\right)f(\tau)d\tau$$

k étant une constante arbitraire.

Théorème 1.1 *[24]: Soit $G(x,t)$ une fonction symétrique à carré intégrable sur $[a,b] \times [a,b]$ et soit $\mathcal{G}$ l'opérateur intégral agissant sur $L^2\left((a,b)\right)$ [1] et dont le noyau*

[1] $L^2\left((a,b)\right)$ etant l'espace de Lebesgue des fonctions à carrés intégrables sur (a,b), il est muni du produit scalaire $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

est $G(x,t)$ ie,

$$\forall f \in L^2((a,b)) \ \mathcal{G}f = \int_a^b G(x,t)f(t)dt$$

alors:

i) *$\mathcal{G}$ possède une valeur propre réelle λ_0 telle que*

$$|\lambda_0| = \|\mathcal{G}\| = \sup_{\|f\|_{L^2}=1} \langle \mathcal{G}f, f\rangle$$

les autres valeurs propres de $\mathcal{G}$ sont réelles, dénombrables, et peuvent être rangées en une suite tendant vers zéro

$$|\lambda_0| > |\lambda_1| > \cdots > |\lambda_n| > \cdots \to 0$$

ii) *Il existe une base orthonormée $\{\phi_n\}_n$ de $L^2((a,b))$ formée des fonctions propres de $\mathcal{G}$.*

iii) *Soit $g = \mathcal{G}f$ alors $\sum\limits_{p=1}^{n} (g, \phi_p)\phi_p$ converge vers g dans $L^2((a,b))$.*

Remarque 1.1 *: Les résultats du théorème (1.1) sont en grande partie dûs au fait que l'opérateur $\mathcal{G}$ est compact, or un opérateur différentiel n'est généralement ni compact ni borné et encore moins l'opérateur l; d'où l'intêret de faire l'étude de $\mathcal{G}$ (qui est en fait l'inverse de l).*

Théorème 1.2 *: On considère le problème régulier de Sturm-Liouville*

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] \pm q(x)y(x) + \lambda\rho(x)y(x) = 0 \\ \begin{cases} a_0y(a) + a_1y'(a) = 0 \\ b_0y(b) + b_1y'(b) = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{1.8}$$

alors

i) *Le problème (1.8) admet une suite dénombrable* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de valeurs propres réelles et simples qui peuvent être rangées par ordre croissant de valeurs absolues*

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_n| < \cdots$$

ii) *Les fonctions propres* $\{\phi_n\}_n$ *corréspondantes aux* $\{\lambda_n\}$ *vérifient*

$$\forall i \neq j \quad \int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\rho(x)dx = 0$$

elles sont donc orthogonales dans $L^2((a,b))$ *pondéré par* $\rho(x)$

iii) $\{\phi_i(x)\}$ *forment une base orthogonale (orthonormée) de l'espace* $L^2_\rho((a,b))$

$$\forall f \in L^2((a,b)) \; f = \lim_{L^2_\rho} \sum_{i=1}^{N} < f, \phi_n > \phi_n.$$

preuve. Pour simplifier, on supposera que $\rho(x) = 1$

considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} ly = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}(x)\right] + q(x)y(x) = 0 \\ \quad \begin{cases} a_0y(a) + a_1y'(a) = 0 \\ b_0y(b) + b_1y'(b) = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{1.9}$$

dans un premier temps, supposons que (1.9) n'admet pas d'autres solutions que $y \equiv 0$. Soit alors $G(x,t)$ la fonction de Green associée à (1.9) et soit $\mathcal{G}$ l'opérateur intégral dont le noyau est $G(x,t)$, on sait que

$$lf = g \Leftrightarrow \mathcal{G}g = f$$

(sur des espaces adéquats) donc si μ est valeur propre de $\mathcal{G}$ alors:

$$\mathcal{G}f = \mu f \Rightarrow lf = \frac{1}{\mu}f$$

invesement si λ est une valeur propre non nulle de l

$$lf = \lambda f \Rightarrow \mathcal{G}f = \frac{1}{\lambda}f$$

reste à élucider le cas de valeur propre nulle. l n'a pas de valeur propre nulle car l'on a supposé que

$$\begin{cases} ly = 0 \\ \begin{cases} a_0y(a) + a_1y'(a) = 0 \\ b_0y(b) + b_1y'(b) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

n'a pour solution que $y \equiv 0$, d'un autre côté $\mathcal{G}g = 0 \Rightarrow g = l0 = 0$. En conclusion les valeurs propres de l sont exactement les inverses de celles de $\mathcal{G}$.

Supposons à present que (1.9) admet une solution non nulle f_0,dans ce cas l'équation $lf = g$ n'a de solutions que si l'on se place dans l'orthogonal de $\{f_0\}$ dans $L^2((a,b))$ (comme on l'a expliqué plus haut); une fois dans l'orthogonal de $\{f_0\}$ on retrouve le cas précédent où $\lambda = 0$ n'est plus valeur propre.

Ainsi, les valeurs propres de l sont les inverses des valeurs propres de $\mathcal{G}$ (sauf eventuellement 0) et les fonctions propres sont les mêmes pour l et $\mathcal{G}$ (sauf eventuellement f_0). Donc les résultats du théorème (1.2) sont une conséquence de ceux du théorème (1.1) ∎

1.3 Une transformation utile

Soit l'opérateur de Sturm-Liouville:

$$l = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}(x)\right] + q(x)$$

si on lui fait subir la transformation T :

$$y \longmapsto (Ty)(x) = \mid s' \mid^{\frac{1}{2}} y(s(x))$$

où s est une fonction (bijective) différentiable, alors l devient :

$$\tilde{l} = \frac{d}{ds}\left[P\left(s\right)\frac{d}{ds}\right] + Q\left(s\right)$$

où

$$\begin{cases} P\left(s\right) = p\left(x\right)s'\left(x\right)^2 \mid_{x=x(s)} \\ Q(s) = s'(x)^{\frac{-1}{2}}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}s'(x)^{\frac{1}{2}}\right] + q(x) \mid_{x=x(s)} \end{cases}$$

$x = x(s)$ étant l'inverse de $s(x)$.

Nous sommes particulièrement intéresse par le cas où $P(s) \equiv 1$, celà donne :

$$p\left(x\right)s'\left(x\right)^2 = 1 \Rightarrow s\left(x\right) = \int\sqrt{\frac{1}{p\left(x\right)}}dx$$

mais plus généralement la tranformation :

$$\begin{aligned} u &= (p\rho)^{\frac{1}{4}}y \\ t &= \int_0^x\sqrt{\frac{\rho\left(\tau\right)}{p\left(\tau\right)}}d\tau \\ c &= \int_0^b\sqrt{\frac{\rho\left(\tau\right)}{p\left(\tau\right)}}d\tau \end{aligned}$$

appliquée à

$$(py\prime)' - qy + \lambda \rho y = 0 \text{ sur } [0, b]$$

la reduit à

$$u'' - ru + \lambda u = 0 \text{ sur } [0, c]$$

y étant fonction de la variable x et u fonction de la variable t, où

$$r = \left(\frac{\varphi''}{\varphi}\right) + \frac{q}{\rho}, \ et\ \varphi = (p\rho)^{\frac{1}{4}}$$

cette dernière transformation est dite transformation de Liouville (ou du moins ça en est une variante). Souvent on trouve dans la littéature sous l'appélation "problème de Sturm-Liouville régulier" un problème du type

$$\begin{cases} -y'' + ry = \lambda y \\ \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

et non pas un problème du type (1.8) comme on l'a introduit au début de ce chapitre; la transformation de Liouville en est l'explication.

1.4 Problèmes de Sturm-Liouville singuliers

Avant d'introduire les problèmes singuliers définissons d'abord ce que l'on entend par opérateur différentiel singulier.

Définition 1.2 : *Soit l'opérateur de Sturm-Liouville*

$$ly = (py')' - qy = py'' + p'y' - qy$$

si p s'annule en un point $a \neq \infty$ l'opérateur l sera dit singulier.

En fait si l'on pose

$$ly = y'' + q_1(x)y' + q_2(x)y = 0 \tag{1.10}$$

alors un point $a \neq \infty$ sera dit singulier-régulier de l'équation (1.10) ssi a est un pôle d'ordre$\leq i$ pour chaque coéfficient $q_i(x)$ $i = 1, 2$; en d'autres termes si a est un point singulier-régulier, l'équation (1.10) peut être écrite sous la forme

$$ly = y'' + (x-a)^{-1} p_1(x)y' + (x-a)^{-2} p_2(x)y = 0$$

où les $p_k(x)$ $k = 1, 2$ sont des fonctions régulières en a (et de plus $p_1(a) \neq 0$ ou $p_2(a) \neq 0$).

Le point $a = \infty$ sera dit singulier-régulier si après la transformation $x \longmapsto \frac{1}{x}$ zéro est un point singulier-régulier.

Définition 1.3 : *Le problème de Sturm-Liouville*

$$\begin{cases} ly = (py')' + qy = \lambda y \text{ sur } (a,b) \\ \text{conditions aux limites en } a \text{ et } b \end{cases}$$

sera dit singulier si:

i) $p(a) = 0$ *ou* $p(b) = 0$ *ou* $p(a) = p(b) = 0$

ii) *l'intervalle (a, b) est semi-fini ou infini.*

iii) *p s'annule (en a ou b) et l'intervalle (a, b) est semi-fini ou infini.*

iv) *les conditions aux limites ne sont pas séparées; par exemple*

$$a_0y(a) + a_1y'(a) = b_0y(b) + b_1y'(b)$$

de telles conditions aux limites peuvent donner lieu à des valeurs propres doubles (cas qu'on ne considérera pas par la suite).

La théorie établie pour les problèmes réguliers n'est pas applicable aux problèmes singuliers; pour s'en convaincre il suffit de considérer l'exemple

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \text{ sur } (0, +\infty) \\ y(0) = y(+\infty) = 0 \end{cases}$$

qui ne donne pas de valeurs propres.

Comme nous nous intéressons aux problèmes donnant lieu à une suite de valeurs propres $\{\lambda_n\}_n$ dont les fonctions propres forment une base hilbertienne de $L^2((a,b))$, et comme celà n'est apparemment pas acquis pour les problèmes singuliers, nous allons donner des théorèmes nous plaçant dans un cadre favorable.

Soit l un opérateur différentiel d'ordre n (régulier ou non) défini sur un intervalle I (fini ou non), on introduit les espaces suivants

$A^n(I) = \left\{f; f^{(n-1)} \text{ existe et est absolument continue sur chaque compact de } I\right\}$

$H_l^n(I) = \{f \in A^n(I);\ f \text{ et } lf \text{ sont dans } L^2(I)\}$

$H^n(I) = \left\{f \in A^n(I);\ f \text{ et } f^{(n)} \text{ sont dans } L^2(I)\right\}$

$H_0^n(I) = \{f \in H^n(I);\ f \text{ est à support compact dans } I\}$ (rappelons que le support d'une fonction f est la fermeture de l'ensemble $\{x;\ f(x) \neq 0\}$).

On définit les opérateurs $T_0(l)$ et $T_1(l)$ comme suit:

$T_0(l)$ est de domaine $H_0^n(I)$ tel que $T_0(l) = lf \quad \forall f \in H_0^n(I)$.

$T_1(l)$ est de domaine $H_l^n(I)$ tel que $T_1(l) = lf \quad \forall f \in H_l^n(I)$.

$T_0(l)$ est aussi appelé opérateur minimal associé à l.

On définit les espaces dits de défaut positif et négatif réspectivement, associés à $T_0(l)$ comme suit:

$\mathcal{D}_+ = \{f \in H^n(I);\ (T_1(l) - iId)\, f = 0\}$ Id désignant l'identité.

$\mathcal{D}_- = \{f \in H^n(I);\ (T_1(l) + iId)\, f = 0\}$

et dans ce cas $n_+ = \dim \mathcal{D}_+$ et $n_- = \dim \mathcal{D}_-$ sont réspectivement appelés indices de défaut positif et négatif de $T_0(l)$.

Si l est auto-adjoint (voir [11]), alors

$$\mathcal{D}_+ = \{f;\ (l - iId)\, f = 0\} \text{ et } \mathcal{D}_- = \{f;\ (l + iId)\, f = 0\}$$

Si $n_+ = n_-$ (voir [11]), alors $T_0(l)$ admet une extension auto-adjointe.

Théorème 1.3 *[11]: Soit l un opérateur différentiel symétrique sur I, et soit T une extension auto-adjointe de l'opérateur $T_0(l)$ alors la résolvante de T, $R(\lambda, T)\left(= (\lambda Id - T)^{-1}\right)$ est compacte pour tout non réel λ si*

(1) I est compact.

ou bien

(2) $n_+ = n_- = n$ où n est l'ordre de l'opérateur différentiel l.

Théorème 1.4 *[11]: Soient l et $T_0(l)$ comme précédemment définis, et soit T une extension auto-adjointe de $T_0(l)$ telle que $R(\lambda, T)$ soit compacte pour tout non réel λ, alors il existe une famille orthonormale complète $\{\varphi_n\}_n$ de fonctions propres de T.*

Il apparait un autre phénomène qui n'existait pas pour les problèmes réguliers, à savoir l'apparition d'un spèctre continu; c'est à dire que les "valeurs propres" ne sont plus une suite discrète dénombrable, mais un intervalle entier, c'est le cas -par exemple- du problème

$$\begin{cases} (xy')' + \left(\lambda x - \frac{m^2}{x}\right) y = 0 \ m \in \mathbf{N} \\ y(0) < \infty \text{ et } y(+\infty) < \infty \end{cases}$$

qui donne lieu à un spèctre continu égal au segment $[0, +\infty[$, c'est à dire que $\forall \lambda \in [0, +\infty[$, $J_m(\sqrt{\lambda} x)$ est une fonction propre (où J_m désigne la fonction de Bessel d'indice m).

Pour parer à ce phénomène nous avons les théorèmes suivants:

Définition 1.4 : *Le spectre essentiel d'un opérateur auto-adjoint T est l'ensemble des points non isolés du spèctre de T, ensemble qui sera noté $\sigma_e(T)$.*

Théorème 1.5 *[11]: Soit l un opérateur de Sturm-Liouville,*

$$l = -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} + q(x)$$

défini sur $[a, b)$ (b pouvant être infini), tel que

$$\int_a^b p(x)^{-\frac{1}{2}} dx = \pm\infty$$

posons

$$Q(x) = q(x) + \frac{1}{4}\left\{p''(x) - \frac{1}{4}[p(x)]^{-1}[p'(x)]^2\right\}$$

alors

i) *Si $Q(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} \infty$, alors $\sigma_e(l)$ est vide.*

ii) *Si $Q(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} c$, alors $\sigma_e(l) = \{\lambda;\ \lambda \geq c\}$.*

Théorème 1.6 *[11]: Soient l et Q comme précédemment définis tels que*

$$\int_a^b p(x)^{-\frac{1}{2}} dx < \infty$$

alors

i) *Si* $q(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$, *alors* $\sigma_e(l)$ *est vide.*

ii) *Si* $\overline{\lim\limits_{x \to b}} \left| \left\{ \int_a^b p(x)^{\frac{-1}{2}} dx \right\}^2 Q(x) \right| < \frac{3}{4}$, *alors* $\sigma_c(l)$ *est vide.*

Remarque 1.2 : *C'est en combinant les 4 théorèmes précédents qu'on retrouve une situation similaire au cas des problèmes réguliers; ceci dit les théorèmes précédent donnent des conditions suffisantes mais non nécessaires, donc par la suite nous supposerons toujours que les valeurs propres associées aux problèmes considérés forment une suite dénombrable dont les fonctions propres associées forment une base de* $L^2((a, b))$.

1.5 Comportement asymptotique des valeurs propres

Soit le problème régulier de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} lu = -(pu')' + qu = \lambda \rho u \text{ sur } [0, \pi] \\ u'(0) - k_1 u(0) = 0 \\ u'(\pi) + k_2 u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

(nous avons pris l'intervalle $[0,\pi]$ comme l'on peut prendre tout autre intervalle compact) posons

$$D[\varphi] = \int_0^\pi \left(p\varphi'^2 + q\varphi^2\right) dx + k_1 p(0)\varphi^2(0) + k_2 p(\pi)\varphi^2(\pi)$$

et

$$H[\varphi] = \int_0^\pi \varphi^2 \rho dx$$

et les formes pôlaires associées

$$D[\varphi,\psi] = \int_0^\pi (p\varphi'\psi' + q\varphi\psi)\, dx + k_1 p(0)\varphi(0)\psi(0) + k_2 p(\pi)\varphi(\pi)\psi(\pi)$$

$$H[\varphi,\psi] = \int_0^\pi \varphi\psi\rho dx$$

on a alors les identités

$$D[\varphi+\psi] = D[\varphi] + 2D[\varphi,\psi] + D[\psi]$$

$$H[\varphi+\psi] = H[\varphi] + 2H[\varphi,\psi] + H[\psi]$$

$$D[\alpha\varphi] = \alpha^2 D[\varphi]\text{, et } H[\alpha\varphi] = \alpha^2 H[\varphi] \ \ \forall\alpha \in IR$$

Nous avons alors les théorèmes suivants

Théorème 1.7 *[7]: La fonction admissible*[2] u_1 *qui minimise l'expression* $D[\varphi]$ *sous la contrainte* $H[\varphi] = 1$, *est une fonction propre du problème (1.11), et la valeur minimale* $D[u_1] = \lambda_1$ *est exactement la valeur propre qui lui est associée.Si l'on augmente le problème précédent en lui ajoutant la contrainte* $D[\varphi, u_1] = 0$; *alors ce dernier problème admet pour solution une fonction propre* u_2 *du problème (1.11), et la*

[2] Par admissible, on entend une fonction continue admettant une dérivée continue par morceaux.

valeur minimale $D[u_2] = \lambda_2$ est exactement la valeur propre qui lui est associée. Ainsi de suite on arrive à retrouver les valeurs propres et les fonctions propres du problème (1.11).

preuve. On ne discutera pas de la solvabilité des problèmes posés mais on la supposera acquise (voir [8]) et on se contentera de vérifier que les solutions des dits problèmes sont les fonctions propres problème (1.11).

Soit le problème

$$\begin{cases} \inf D[u] \\ H[u] = 1 \end{cases}$$

supposons qu'il admette pour solution u_1 telle que $D[u_1] = \lambda_1$; soit v une fonction quelconque non identiquement nulle, alors

$$H\left[\frac{v}{(H[v])^{\frac{1}{2}}}\right] = 1$$

donc forcemment

$$D\left[\frac{v}{(H[v])^{\frac{1}{2}}}\right] \geq \lambda_1$$

λ_1 étant la valeur minimale, d'où

$$D[v] \geq \lambda_1 H[v]$$

et ceci pour toute fonction v non identiquement nulle. Posons $v = u_1 + \varepsilon\zeta$ (ε étant une constante arbitraire et ζ une fonction quelconque), alors

$$D[u_1 + \varepsilon\zeta] \geq \lambda_1 H[u_1 + \varepsilon\zeta]$$

soit

$$D[u_1] + 2\varepsilon D[u_1, \zeta] + \varepsilon^2 D[\zeta] \geq \lambda_1 H[u_1] + 2\lambda_1 \varepsilon H[u_1, \zeta] + \lambda_1 \varepsilon^2 H[\zeta]$$

ou encore

$$2\varepsilon\left\{D\left[u_1,\zeta\right]-\lambda_1 H\left[u_1,\zeta\right]+\frac{\varepsilon}{2}\left(D\left[\zeta\right]-\lambda_1 H\left[\zeta\right]\right)\right\}\geq 0$$

donc pour tout $\varepsilon>0$

$$D\left[u_1,\zeta\right]-\lambda_1 H\left[u_1,\zeta\right]\geq-\frac{\varepsilon}{2}\left(D\left[\zeta\right]-\lambda_1 H\left[\zeta\right]\right)$$

et pour tout $\varepsilon<0$

$$D\left[u_1,\zeta\right]-\lambda_1 H\left[u_1,\zeta\right]\leq-\frac{\varepsilon}{2}\left(D\left[\zeta\right]-\lambda_1 H\left[\zeta\right]\right)$$

donc forcemment en faisant tendre ε vers 0

$$D\left[u_1,\zeta\right]-\lambda_1 H\left[u_1,\zeta\right]=0 \tag{1.12}$$

or

$$\begin{aligned}
D\left[u_1,\zeta\right] &= \int_0^\pi\left(pu_1'\zeta'+u_1\zeta q\right)dx+k_1p(0)u_1(0)\zeta(0)+k_2p(\pi)u_1(\pi)\zeta(\pi)\\
&= \left[pu_1'\zeta\right]_0^\pi+\int_0^\pi\left(-\left(pu_1'\right)'\zeta+u_1\zeta q\right)dx+k_1p(0)u_1(0)\zeta(0)+\\
&\quad +k_2p(\pi)u_1(\pi)\zeta(\pi)\\
&= \int_0^\pi \zeta l u_1 dx
\end{aligned}$$

et par suite

$$(1.12)\Leftrightarrow\int_0^\pi \zeta l u_1 dx=\lambda_1\int_0^\pi u_1\zeta\rho dx$$

comme ζ est quelconque, on a

$$lu_{1=}\lambda_1\rho u_1$$

donc λ_1 est bien valeur propre du problème (1.11) et u_1 la fonction propre associée.

Soit à présent le problème

$$\begin{cases} \inf D[u] \\ H[u] = 1 \\ H[u, u_1] = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

supposons qu'il admette pour solution u_2, telle que $D[u] = \lambda_2$, par un raisonnement analogue au précédent nous arrivons à

$$D[u_2, \zeta] - \lambda_2 H[u_2, \zeta] = 0 \tag{1.14}$$

mais ceci -à priori- sous l'hypothèse supplémentaire

$$H[\zeta, u_1] = 0 \tag{1.15}$$

pour être dans les condition du second problème (1.13), en fait l'hypothèse (1.15) est superflue; en effet soit η une fonction quelconque, il va alors exister une constante α telle que $\zeta = \eta + \alpha u_1$ et $H[\zeta, u_1] = 0$[3] , d'un autre côté si dans (1.12) on remplace ζ par u_2 on a

$$D[u_1, u_2] - \lambda_1 H[u_1, u_2] = 0$$

ce qui implique que

$$D[u_1, u_2] = 0 \tag{1.16}$$

car $H[u_1, u_2] = 0$.dans (1.14) on pose $\zeta = \eta + \alpha u_1$ et l'on obtient

$$D[u_2, \eta] + \alpha D[u_2, u_1] - \lambda_2 H[u_2, \eta] - \alpha\lambda_2 H[u_2, u_1] = 0$$

du fait que $D[u_1, u_2] = 0$ on a alors

$$D[u_2, \eta] - \lambda_2 H[u_2, \eta] = 0$$

[3] $H[\zeta, u_1] = 0 \Rightarrow H[\eta, u_1] + \alpha H[u_1, u_1] = 0 \Rightarrow \alpha = -H[\eta, u_1]$

donc (1.14) est vraie pour toute fonction η sans pour autant qu'elle vérifie $H[\eta, u_1] = 0$. Comme pour le premier problème (1.14) permet de conclure que

$$lu_2 = \lambda_2 \rho u_2$$

Il suffit de réitérer le même raisonnement pour prouver le théorème. ■

Ce procédé nous a permis -sans vraiment le vouloir- de classer les valeurs propres dans un ordre croissant $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$.

Pour se convaincre que ce théorème fournit toutes les fonctions propres, on démontre (voir [7]) que les $(u_n)_n$ forment une famille totale dans L^2.

Théorème 1.8 *[7]: Soient* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$, $(n-1)$ *fonctions suffisamment régulières (disons continues par morceaux) posons*

$$d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} = \min D[\varphi]$$

où φ *est une fonction vérifiant*

$$\begin{aligned} H[\varphi] &= 1 \\ \text{et } H[\varphi, v_i] &= 0,\ i = 1, n-1 \end{aligned}$$

alors la $n^{ième}$ *valeur propre de (1.11) notée* λ_n *vérifie*

$$\lambda_n = \max_{\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}} d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$$

preuve. Nous avons montré dans le théorème (1.7) que

$$d\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\} = \lambda_n$$

donc il faudra montrer que

$$d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} \leq \lambda_n,\ \forall \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$$

pour celà il suffira de trouver une fonction particulière φ vérifiant $H[\varphi] = 1$ et $H[\varphi, v_i] = 0$, $i = 1, n-1$ et pour laquelle $D[\varphi] \leq \lambda_n$. Posons alors

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

la condition $H[\varphi, v_i] = 0$, donne $(n-1)$ équations algébriques en c_i, et la condition $H[\varphi] = 1$, donne que $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$.

D'après le théorème (1.7)

$$\begin{cases} D[u_i, u_j] = 0, \ i \neq j \\ D[u_i] = \lambda_i \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}
D[\varphi] &= D\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right] \\
&= D\left[c_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i u_i\right] \\
&= D[c_1 u_1] + 2D\left[c_1 u_1, \sum_{i=2}^{n} c_i u_i\right] + D\left[\sum_{i=2}^{n} c_i u_i\right] \\
&= c_1^2 \lambda_1 + D\left[\sum_{i=2}^{n} c_i u_i\right] \\
&= \vdots \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i
\end{aligned}$$

or $\lambda_i \leq \lambda_n \ \forall i \leq n$, donc

$$D[\varphi] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \lambda_n$$

d'où le résultat

$$d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\} \leq D[\varphi] \leq \lambda_n \ \blacksquare$$

Remarque 1.3 : *Ce théorème est aussi connu sous l'appelation "principe maximinimal", il existe d'ailleurs une version plus abstraite de ce dernier(voir [18]): Si A est un opérateur auto-adjoint, positif , et d'inverse compact alors*

$$\lambda_j = \max_{co\dim M = j-1} \ \min_{\substack{u \in M \\ \|u\|=1}} (Au, u)$$

où λ_j désigne la $j^{ème}$ valeur propre de A, $(.,.)$ et $\|.\|$ désignent réspectivement le produit scalaire et la norme de l'espace de Hilbert où agit A, et M parcourt l'ensemble des sous espaces fermés de
$co\dim\,(j-1)$ dans $D(A)$ le domaine de A.

1.5.1 Cas régulier

Comportement asymptotique des valeurs propres

Soit l'équation (supposée sans points singuliers)

$$(py')' - qy + \lambda\rho y = 0 \text{ sur } [0,\pi] \tag{1.17}$$

à laquelle on applique la transformation de Liouville

$$u(t) = (p\rho)^{\frac{1}{4}}\, y(x),\ t = \int_0^x \left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau,\ a = \int_0^\pi \left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau$$

ce qui donne la nouvelle équation

$$u''(t) - r(t)u(t) + \lambda u(t) = 0 \text{ sur } [0,a]$$

où r est une fonction continue sur $[0,a]$, on supposera pour simplifier que (1.17) est associée aux conditions de Dirichlet

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

ce qui donne après transformation le nouveau problème

$$\begin{cases} -u'' + ru = \lambda u \\ u(0) = u(a) = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

comme nous l'avons vu la $n^{ème}$ valeur propre λ_n du problème (1.18) est donnée par

$$\lambda_n = \max_M \min_{\substack{u\in M \\ \|u\|=1}} \int_0^a \left[(u')^2 + ru^2\right] dt$$

(M comme précédemment défini), comme

$$r_m + \int_0^a (u')^2\, dt \le \int_0^a \left[(u')^2 + ru^2\right] dt \le r_M + \int_0^a (u')^2\, dt$$

où $r_m = \inf\limits_{[0,a]} r(t)$ et $r_M = \sup\limits_{[0,a]} r(t)$, si l'on considère que $\|u\| = \int_0^a u^2 dt = 1$.

soit encore que

$$r_m + \max\min \int_0^a (u')^2 dt \leq \lambda_n \leq r_M + \max\min \int_0^a (u')^2 dt$$

or justement $\max\min \int_0^a (u')^2 dt = \mu_n$ est la $n^{ème}$ valeur propre issue du problème

$$\begin{cases} -v'' = \mu v \\ v(0) = v(a) = 0 \end{cases}$$

donc

$$r_m + \mu_n \leq \lambda_n \leq r_M + \mu_n$$

et comme (voir exemple 1)

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_n a^2}{n^2\pi^2} = 1$$

soit en remplaçant a par sa valeur

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\lambda_n} = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^\pi \left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau\right)^2$$

d'où

$$\lambda_n = O(n^2)$$

Remarque 1.4 :

1) *Cette manière de faire pour trouver le comportement asymptotique des valeurs propres est appelée méthode d'encadrement de Courant-Fischer.*

2) *Il existe d'autres méthodes permettant de trouver le comportement asymptotique des valeurs propres, citons par exemple la methode suivante qui fait intervenir*

la transformation de Prüfer (voir par exemple [14]):
Soit le problème

$$\begin{cases} -y'' + qy = \lambda y \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases}$$

et soit la transformation de Prüfer

$$\tan\theta = \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{y}{y'}$$

si l'on dérive les deux membres de cette équation on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\theta'}{\cos^2\theta} &= \lambda^{\frac{1}{2}} \frac{(y')^2 - yy''}{(y')^2} \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}} \left(1 + (\lambda - q) \frac{y}{(y')^2}\right) \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}} \left(1 + (\lambda - q) \lambda^{-1} \tan^2\theta\right) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \theta' &= \cos^2\theta \left(\lambda^{\frac{1}{2}} + (\lambda - q) \lambda^{-\frac{1}{2}} \tan^2\theta\right) \\ &= \left(\lambda^{\frac{1}{2}} \cos^2\theta + (\lambda - q) \lambda^{-\frac{1}{2}} \sin^2\theta\right) \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}} - q\lambda^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} q\lambda^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} q\lambda^{-\frac{1}{2}} \cos 2\theta \end{aligned}$$

on intègre cette dernière équation entre 0 *et* a, *on obtient*

$$\theta(a) - \theta(0) = a\lambda^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^a q(t)dt + \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{1}{2}} \int_0^a q(t) \cos(2\theta(t))\, dt$$

si l'on revient à présent aux conditions aux limites on trouve

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \Rightarrow \tan\theta(0) = 0 \Rightarrow \theta(0) = 0 \\ y(a) = 0 \Rightarrow \tan\theta(a) = 0 \Rightarrow \theta(a) = (n+1)\pi,\ n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

d'où

$$(n+1)\pi = a\lambda_n^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\lambda_n^{-\frac{1}{2}} \int_0^a q(t)dt + \frac{1}{2}\lambda_n^{-\frac{1}{2}} \int_0^a q(t) \cos(2\theta(t))\, dt$$

après inversion et du fait que $\int_0^a q(t)dt < \infty$, *et que* $\int_0^a q(t)\cos(2\theta(t))\, dt < \infty$, *on retrouve*

$$\lambda_n = O(n^2)$$

cette méthode, -bien que simple- reste muette si a est infini (c'est le cas pour les problèmes singuliers); c'est pourquoi nous avons priviligié la metthode de Courant-Fischer.

3) *En général les valeurs propres d'un problème régulier sont positives, cependant si par exemple la fonction $q(x)$ de l'opérateur l est négative il peut apparaitre un nombre fini de valeurs propres négatives.*

4) *Quelque soit les conditions aux limites considérées, les valeurs propres dépendent continument des coefficients de l'opérateur l.*

Comportement asymptotique des fonctions propres

On considère toujours le même problème régulier

$$\begin{cases} (py')' - qy + \lambda \rho y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

qu'on transforme en

$$\begin{cases} u'' - ru + \lambda u = 0 \\ u(0) = u(a) = 0 \end{cases}$$

la solution de l'équation $u'' - ru + \lambda u = 0$ qui s'annule en zéro vérifie l'équation intégrale

$$u(t) = c \sin \sqrt{\lambda} t + \frac{1}{\lambda} \int_0^t r(\tau) u(\tau) \sin \sqrt{\lambda}\,(t - \tau)\, d\tau$$

où c est une constante arbitraire.Les conditions $u(a) = 0$, et$\int_0^a u^2 dt = 1$, nous donnent

$$c = \sqrt{\frac{2}{a}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

ou encore

$$u(t) - \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \sqrt{\lambda} t = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

donc si λ_n est la $n^{ème}$ valeur propre du problème considéré alors

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

comme $\lambda_n = O(n^2)$, ontire que

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} t + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

soit si l'on revient au problème initial

$$y_n(x) = c_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a}\int_0^x \left(\frac{\varrho}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dt\right)}{(p\rho)^{\frac{1}{4}}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

où c_n est une constante de normalisation donnée par

$$\frac{1}{c_n^2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}\int_0^x \left(\frac{\varrho}{p}\right)^{\frac{1}{2}} dt\right)}{(p\rho)^{\frac{1}{2}}} dx$$

Remarque 1.5 **1)** *Plus généralement (voir [14]) on peut donner le comportement des fonctions propres du problème*

$$\begin{cases} -u'' + ru = \lambda u, \ sur \ [0, a] \\ \alpha_1 u(0) - \alpha_2 u'(0) = 0 \\ \beta_1 u(a) - \beta_2 u'(a) = 0 \end{cases}$$

i) *Si $\alpha_2 \neq 0$ et $\beta_2 \neq 0$, alors*

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \alpha_2 \cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) + \left(\frac{aA_1(t) - \alpha_2 c_1 t}{n\pi}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{a}\right) + \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

où

$$A_1(t) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\int_0^t r(s)ds$$

et

$$c_1 = \frac{\alpha 1}{\alpha_2} + \frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{1}{2}\int_0^a r(s)ds$$

ii) *Si $\alpha_2 \neq 0$ et $\beta_2 = 0$, alors*

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \alpha_2 \cos\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t}{a}\right) + \left(\frac{aA_1(t) - \alpha_2 c_2 t}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}\right) \times \\ &\quad \times \sin\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t}{a}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

où

$$c_2 = \frac{\alpha 1}{\alpha_2} + \frac{1}{2}\int_0^a r(s)ds$$

iii) *Si $\alpha_2 = 0$ et $\beta_2 \neq 0$, alors*

$$u_n(t) = \frac{a}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}[\alpha_1 \sin\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{a}\right) + \left(\frac{aB_1(t)+\alpha_1 c_3 t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right) \times$$
$$\times \cos\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{a}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)]$$

où

$$B_1(t) = -\frac{\alpha_1}{2}\int_0^t r(s)ds$$

et

$$c_3 = \frac{\beta_1}{\beta_2} + \frac{1}{2}\int_0^a r(s)ds$$

iv) *Si $\alpha_2 = 0$ et $\beta_2 = 0$, alors*

$$u_n(t) = \frac{a}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}[\alpha_1 \sin\left(\frac{(n+1)\pi t}{a}\right) + \left(\frac{aB_1(t)+\alpha_1 c_4 t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right) \times$$
$$\times \cos\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{a}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)]$$

où

$$c_4 = \frac{1}{2}\int_0^a r(s)ds$$

2) *et si l'on pose $c_n = \frac{1}{\|u_n\|^2}$, où $\|u_n\|^2 = \int_0^a |u_n|^2 dt$, alors*

i) *Si $\alpha_2 \neq 0$ et $\beta_2 \neq 0$, alors*

$$c_n = \frac{2}{\alpha_2^2 a} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ii) *Si $\alpha_2 \neq 0$ et $\beta_2 = 0$, alors*

$$c_n = \frac{2}{\alpha_2^2 a} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

iii) *Si $\alpha_2 = 0$ et $\beta_2 \neq 0$, alors*

$$c_n = \left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{a}\right)^2 \frac{2}{\alpha_1^2 a} + O(1)$$

iv) *Si $\alpha_2 = 0$ et $\beta_2 = 0$, alors*

$$c_n = \left(\frac{(n+1)\pi}{a}\right)^2 \frac{2}{\alpha_1^2 a} + O(1)$$

L'enseignement à retenir de ces résultats est que pour tout $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, *les fonctions propres normalisées* $\phi_n(t) = \sqrt{c_n}u_n(t)$ *est toujours de la forme* $\phi_n(t) = O(1)$.

3) *on peut aussi montrer indépendemment de ce qui précéde que les solutions du problème régulier de Sturm-liouville restent bornées lorsque l'argument* $t \to \infty$, *ou lorsque le paramètre spèctrale* $\lambda \to \infty$.

1.5.2 Cas singulier

Nous n'avons pas de réponse globale concernant le comportement asymptotique des valeurs et des fonctions propres issues de problèmes singuliers; mais nous allons essayer de donner ce comportement pour certaines familles particulières de problèmes singuliers.

Sur un intervalle compact

nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} ly = -\frac{d}{dx}\left[(x-c)^{\alpha}(x-d)^{\beta}p_1(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)y(x) = \lambda y(x) \\ \text{conditions aux limites } (y(c) = y(d) = 0) \end{cases}$$

où $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ (α et β ne s'annulant pas simultanément) et $p_1(x) \neq 0$ sur $[c, d]$.

Ce type de problème représente le modèle des problèmes singuliers sur un intervalle compact; mais pour simplifier nous nous limiterons à des problèmes du type

$$\begin{cases} ly = -\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha}\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)y(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = y(a) = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

En fait nous allons essayer de reproduire ce qui a dejà été fait pour les problèmes réguliers; à savoir appliquer la transformation de Liouville puis utiliser la méthode d'encadrement de Courant-Fischer, pour celà deux cas s'imposent $0 < \alpha < 2$ et $\alpha \geq 2$.

- Si $0 < \alpha < 2$

On reprend la transformation de Liouville

$$u(t) = x^{\frac{\alpha}{4}} y(x);\ t = \int_0^x \tau^{\frac{-\alpha}{2}} d\tau;\ b = \int_0^a \tau^{\frac{-\alpha}{2}} d\tau$$

soit

$$u(t) = x^{\frac{\alpha}{4}} y(x);\ t = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}} x^{1-\frac{\alpha}{2}};\ b = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}} a^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

le problème est alors transformé en

$$\begin{cases} -u''(t) + Q(t)u(t) = \lambda u(t) \\ u(0) = u(b) = 0 \end{cases}$$

où

$$Q(t) = \frac{\alpha}{4}\left(1 - \frac{3\alpha}{4}\right)\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)t\right]^{-2} + q\left(\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)t\right]^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) \qquad (1.20)$$

Si $Q(t)$ est une fonction bornée le raisonnement fait pour un problème régulier peut être repris à la lettre sans aucune modificationet on arrive au même résultat $\lambda_n = O(n^2)$.

Si $Q(t)$ n'est pas bornée (en particulier en zéro qui est la singularité); le principe maximinimal nous apprend que les valeurs propres sont le max min d'une certaine expression sur un ensemble de contrainte ; on augmentera ce dernier en ajoutant une contrainte de nullité sur l'intervalle $[0,\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ "assez petit" puis on fera tendre ε vers zéro. Illustrons celà par un exemple.

Exemple 2 : *Soit le problème singulier*

$$\begin{cases} xy'' + y' + \left(x\lambda - \frac{m^2}{x}\right) y = 0,\ m \in \mathbb{N}^* \\ y(0) < \infty,\ et\ y(1) < \infty \end{cases}$$

alors les solutions de ce problème sont

$$y_n(x) = J_m(x\sqrt{\lambda})$$

où J_m est la fonction de Bessel d'indice m, et les valeurs propres associées λ_n sont les carrés des zéros de la fonction $J_m(x)$. Nous effectuons le changement

$$u(x) = \sqrt{x} J_m(x\sqrt{\lambda})$$

alors la nouvelles fonction u vérifie l'équation

$$u'' + \left(\lambda - \frac{4m^2 - 1}{4x^2}\right) u = 0 \tag{1.21}$$

et dans ce cas (si l'on reprend les notations précédentes)

$$D[\varphi] = \int_0^1 \left((\varphi')^2 + \frac{4m^2 - 1}{4x^2} \varphi^2 \right) dx$$
$$H[\varphi] = \int_0^1 \varphi^2 dx$$

comme $m \geq 1$ alors

$$D[\varphi] \geq \int_0^1 (\varphi')^2 \, dx$$

soit en introduisant le max min *des deux côtés on arrive à*

$$\lambda_n \geq n^2 \pi^2 \tag{1.22}$$

si l'on impose la contrainte supplémentaire $\varphi(x) = 0$ pour $0 \leq x \leq \varepsilon$ (ε assez "petit") alors

$$\int_0^1 \frac{4m^2 - 1}{4x^2} \varphi^2 dx = \int_\varepsilon^1 \frac{4m^2 - 1}{4x^2} \varphi^2 dx$$
$$\leq \frac{4m^2 - 1}{4\varepsilon^2} \int_\varepsilon^1 \varphi^2 dx = \frac{c}{\varepsilon^2}$$

$\left(c = \frac{4m^2 - 1}{4}\right.$ *si* $\left.\int_0^1 \varphi^2 dx = 1\right)$
donc

$$D[\varphi] \leq \int_\varepsilon^1 (\varphi')^2 \, dx + \frac{c}{\varepsilon^2}$$

Si on applique de nouveau le max min *ce qui donne*

$$\lambda_n \leq \frac{n^2 \pi^2}{(1 - \varepsilon^2)} + \frac{c}{\varepsilon^2}$$

si l'on pose $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$ alors

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n}{n^2 \pi^2} \leq 1 \tag{1.23}$$

(2.2.1) et (1.23) permettent de conclure que :

$$\lambda_n = O\left(n^2\right)$$

- Si $\alpha \geq 2$

Alors les transformations

$$u = x^{\frac{\alpha}{4}}y;\ t = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}x^{1-\frac{\alpha}{2}},\ \text{pour } \alpha > 2$$

et

$$u = \sqrt{x}y;\ t = \ln x,\ \text{pour } \alpha = 2$$

posent problème dans le sens où l'image de zéro par celles-ci est ∞; donc l'intervalle initialement compact est transformé en un intervalle qui ne l'est pas, et dans ce cas la méthode utilisée pour le cas $0 < \alpha < 2$, ne peut être reprise car notre problème référence $-u'' = \lambda u$ ne donne pas de valeurs propres.

En ce qui concerne le comportement asymptotique des fonctions propres issues d'un problème singulier avec $0 < \alpha < 2$, le même comportement donné dans le cas régulier reste valable à condition que (1.20) soit intégrable.

Remarque 1.6 : *Il existe d'autres types de problèmes singuliers ; par exemple on peut supposer que dans l'opérateur*

$$l = -\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} + q(x);\ x \in (a,b)$$

le coefficient $p(x)$ s'annule en un point c intérieur à (a,b); ou encore que $p(x)$ s'annule en plusieurs points différents; dans ces cas -bien que ce soit plus laborieux- on arrive généralement à trouver des résultats semblables à ceux énoncés plus haut concernant les valeurs propres et fonctions propres on citera par exemple [6].

Sur un intervalle infini

Soit le prblème

$$\begin{cases} ly = \lambda y \text{ sur } I \text{ intervalle semi-fini ou infini} \\ \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

par la suite, et pour avoir des solutions dans $L^2(I)$ on supposera que les conditions aux limites sont de la forme (ou du moins elles impliquent) $y(\pm\infty) = 0$.

Pour ce cas nous n'avons de réponse que pour le cas ou

$$ly = -y'' + q(x)y$$

avec

$$q(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m \ (m \geq 2)$$

et dans ce cas (voir [12])

$$\lambda_n = O\left(n^{\frac{2m}{m+2}}\right)$$

en fait

$$\lambda_n = A_m c_m n^{\frac{2m}{m+2}} \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k n^{\frac{-2k}{m+2}}\right]$$

avec

$$A_m = |a_0|^{\frac{1}{m+2}} \left[\frac{\sqrt{\pi}2m\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)c_m}\right]^{\frac{m+2}{2m}}$$

et

$$c_m = 1 \text{ si } m \text{ pair, et } c_m = \cos\frac{\pi}{2m} \text{ si } m \text{ impair}$$

En ce qui concerne le comportement asymptotique des solutions de l'équation

$$y'' - (q(x) - \lambda)\,y = 0 \tag{1.24}$$

nous n'avons de résultats que sous certaines conditions sur $q(x)$.

Par exemple sur la demi droite $[0, +\infty[$ si $q(x)$ est de classe C^2 et vérifie $q'(x) > 0$, pour $x \gg 1$, et $q(+\infty) = +\infty$; alors pour $\lambda \gg 1$, l'équation (1.24) admet des solutions ayant le comportement

$$\tilde{y}_{1,2}(x, \lambda) = (\lambda - q(x))^{\frac{-1}{4}} \exp\left\{\pm i \int_{x_0(\lambda)}^{x} \sqrt{(\lambda - q(t))}dt\right\} \text{ si } x < x_0(\lambda)$$

et

$$\tilde{y}_0(x,\lambda) = (\lambda - q(x))^{\frac{-1}{4}} \exp\left\{ -\int_{x_0(\lambda)}^{x} \sqrt{(q(t)-\lambda)}dt \right\} \text{ si } x > x_0(\lambda)$$

(voir [12]) où $x_0(\lambda)$ est le point où se réalise $\lambda = q(x_0(\lambda))$ ie, $x_0(\lambda) = q^{-1}(\lambda)$, un tel point est appelé point de retour (turning point), c'est le point où les comportements $\tilde{y}_i$ ne sont plus valables. Il est clair que $\tilde{y}_0(+\infty,\lambda) = 0$; le choix entre $\tilde{y}_1$ et $\tilde{y}_2$ se fait en se référant aux conditions aux limites au point 0. Si de plus $q(x) \sim ax^{\alpha}$ quand $x \to +\infty$ ($q(x)$ ≡polynôme par exemple), alors la représntation $\tilde{y}_0(x,\lambda)$ est double; c'est à dire qu'elle est valable en fixant $x (> x_0(\lambda))$ et en faisant tendre $\lambda \to +\infty$, et vice versa.

On remarquera que $|\tilde{y}_i| \sim \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{4}}}$, quand $\lambda \to +\infty$; et que

$$\begin{aligned}\int |y(x)|^2 dx &\sim \int_0^{x_0(\lambda)} |\tilde{y}_{1,2}(x,\lambda)|^2 dx + \int_{x_0(\lambda)}^{+\infty} |\tilde{y}_0(x,\lambda)|^2 dx \\ &\sim \frac{x_0(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{x_0(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}, \text{ quand } \lambda \to +\infty\end{aligned}$$

•Suite aux résultats obtenus pour $q(x)$ polynômiale, on se propose d'étudier le même problème avec $q(x)$ fonction entière, disons $q(x) = e^x$, soit donc le problème

$$\begin{cases} -y'' + e^x y = \lambda y \\ y(+\infty) = y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

Pour le résoudre on pose le changement

$$t = 2e^{\frac{x}{2}}$$

$$x \in (0,+\infty) \Rightarrow t \in (2,+\infty)$$

le problème (1.25) devient

$$\begin{cases} v'' + \frac{1}{t}v' - \left(1 + \frac{-4\lambda}{t^2}\right)v = 0 \\ v(2) = v(+\infty) = 0 \end{cases}$$

où $v(t) = y(x)$, si l'on pose $\nu^2 = -4\lambda$ on retrouve l'équation

$$v'' + \frac{1}{t}v' - \left(1 + \frac{\nu^2}{t^2}\right)v = 0 \tag{1.26}$$

qui n'est autre que l'équation de Bessel modifiée (voir [21]), équation qui a pour solution (1.26)

$$v(t) = c_1 I_\nu(t) + c_2 K_\nu(t)$$

où $I_\nu(t)$ est la fonction de Bessel modifiée de première éspèce et $K_\nu(t)$ est la fonction de Mac Donald.

Si $\nu \in \mathbf{N}$: comme

$$I_\nu(t) \approx \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}} \text{ lorsque } t \to +\infty$$

et

$$K_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}}e^{-t} \text{ lorsque } t \to +\infty$$

(voir [21])

sous la condition $v(+\infty) = 0$ nous obtenons

$$v(t) = c_2 K_\nu(t)$$

d'un autre còté la condition $v(2) = 0$ donne

$$K_\nu(2) = 0$$

or pour tout ν réel, cette équation n'est jamais réalisée, pour le voir il suffit de considérer la représentation intégrale

$$K_\nu(z) = \int_0^{+\infty} e^{-z \cosh u} \cosh(\nu u)\, du \quad \operatorname{Re} z > 0$$

donc

$$K_\nu(2) = \int_0^{+\infty} e^{-2\cosh u} \cosh(\nu u)\, du \neq 0$$

car $e^{-2\cosh u} \cosh(\nu u) > 0$, et par suite pour $\nu \in \mathbf{N}$ pas de fonctions propres.

Si $\nu \notin \mathbf{N}$: le même raisonnement fait pour le cas $\nu \in \mathbf{N}$ nous amène à

$$K_\nu(2) = 0$$

soit trouver les zéros de la fonction

$$f(\nu) = K_\nu(2)$$

si l'on se limite au cas $\nu = i\tau$ nous avons le comportement [21]

$$K_{i\tau}(x) \approx \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-\pi\tau}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \tau \ln \tau - \tau - \tau \ln \frac{x}{2}\right)$$

quand $\tau \to \infty$ disons $\tau > \tau_0 \gg$ et $x > 0$ fixé

soit que

$$K_{i\tau}(2) \approx \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-\pi\tau}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \tau \ln \tau - \tau\right) \tag{1.27}$$

pour avoir une estimation des solutions de $K_{i\tau}(2) = 0$, on remplace[4] $K_{i\tau}(2)$ par son comportement (1.27) ce qui donne

$$\left(\frac{\pi}{4} + \tau \ln \tau - \tau\right) = k\pi \Rightarrow \tau \ln \tau - \tau = \pi\left(k - \frac{1}{4}\right)$$

on pose

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \tau \ln \tau - \tau - \pi\left(k - \frac{1}{4}\right) \\ &= \tau \ln \tau - \tau - m \text{ où } m = \pi\left(k - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

[4] si f et g sont deux fonctions se comportant de la même façon, avec l'une des deux qui change de signe chaque fois qu'elle s'annule; alors les zéros de l'une sont une "bonne estimation" des zéros de l'autre.

alors h ainsi définie est une fonction strictement croissante, pour qu'elle s'annule il suffit de choisir $k = k_0$ assez grand $\left((\tau_0 \ln \tau_0 - \tau_0) \leq \left(k_0\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$ ce qui est toujours possible, ainsi l'équation $h(\tau) = 0$ va admettre des solutions pour chaque $k \geq k_0$.

En fait nous n'allons pas résoudre l'équation car il nous suffit d'avoir le comportement asymptotique des solutions pour cela nous allons utilisé le théorème suivant

Théorème 1.9 *[10]: Soit g une fonction définie dans un voisinage de $(+\infty)$, non équivalente à une constante non nulle et possédant les propriétés*

1) *g' est monotone, ne s'annule pas au voisinage de $(+\infty)$, et vérifie $g' = o(1)$.*

2) *Lorsque y tend vers $(+\infty)$ on a l'équivalence $g'(y + cg(y)) \sim g'(y)$ $\forall c \in \mathbf{R}$.*

Sous ces conditions on définit la suite de fonctions $(u_n(x))_n$ par

$$u_0(x) = x \text{ et } u_{n+1}(x) = x + g(u_n(x))$$

alors si $u(x)$ est la solution de l'équation

$$u(x) - g(u(x)) = x$$

nous avons l'équivalence

$$(u(x) - u_n(x)) \sim g(x)(g'(x))^n \text{ au voisinage de } (+\infty)$$

Revenons à notre problème, on cherche à obtenir le comportement asymptotique des solutions de l'équation $\tau \ln \tau - \tau = m$ (où $\tau = \tau(m)$), pour être dans les conditions du théorème (1.9) on pose le changement

$$z = \ln \tau \text{ et } t = \ln m$$

d'où

$$\begin{aligned} \tau \ln \tau - \tau &= m \Leftrightarrow ze^z - e^z = e^t \\ ze^z - e^z &= e^t \Leftrightarrow z = t - \ln(z-1) \end{aligned}$$

nous allons donc appliquer le théorème (1.9) a l'équation

$$z + \ln(z-1) = t$$

soit

$$z - g(z) = t \text{ où } g(z) = -\ln(z-1)$$

on construit la suite $u_n(t)$ par

$$\begin{aligned} u_0(t) &= t \\ u_1(t) &= t + g(u_0) = t - \ln(t-1) \end{aligned}$$

à ce niveau nous avons l'équivalence

$$(z(t) - u_1(t)) \sim g(t)g'(t) = -\frac{\ln(t-1)}{t-1}$$

ou encore

$$\begin{aligned} z(t) &\sim u_1(t) + \frac{\ln(t-1)}{t-1} \\ z(t) &\sim t - \ln(t-1) + \frac{\ln(t-1)}{t-1} \end{aligned}$$

le terme $\dfrac{\ln(t-1)}{t-1}$ tendant vers zéro à l'infini, nous allons le négliger, ce qui donne

$$z(t) \sim t - \ln(t-1)$$

soit si l'on revient aux variables initiales

$$\ln \tau \sim \ln m - \ln(\ln m - 1)$$

et par suite

$$\tau \sim \frac{m}{\ln m - 1} \sim \frac{m}{\ln m}$$

soit

$$\tau \sim \frac{\pi\left(k - \frac{1}{4}\right)}{\ln \pi\left(k - \frac{1}{4}\right)}$$

et comme $i\tau = \nu = 2\sqrt{-\lambda}$, cela donne le résultat final

$$\lambda_k \sim \frac{k^2}{(\ln k)^2}$$

résultat original, dans le sens où les valeurs propres (ou du moins une partie des valeurs propres) λ_k ne se comportent pas comme des puissances de k.

Remarque 1.7 : *Rappelons que si l est un opérateur auto-adjoint, positif et d'inverse compact, alors la $n^{ème}$ valeur propre λ_n associée à l est donnée par*

$$\lambda_n = \max\min\,(lu, u)$$

si l'on rajoute à l une fonction $q(x)$ bornée sur l'intervalle (borné ou non) où il agit, alors $l+q$ va posséder des valeurs propres ayant un même comportement asymptotique que celui des valeurs propres de l, ceci à condition que $l+q$ soit auto-adjoint, positif et d'inverse compact sur le même domaine que l; en effet, si

$$(l + q(x))\,u = \mu_n u$$

alors

$$\mu_n = \max\min\,((l+q)\,u, u)$$

or

$$\begin{aligned}((l+q)\,u, u) &= (lu, u) + (q(x)u, u) \\ &= (lu, u) + \int_I q(x)u^2(x)dx\end{aligned}$$

comme $q(x)$ est bornée

$$m \leq q(x) \leq M$$

d'où

$$(lu, u) + m\,\|u\|^2 \leq ((l+q)\,u, u) \leq (lu, u) + M\,\|u\|^2$$

comme le max min *est pris sur un ensemble tel que $\|u\| = 1$, alors*

$$m + \max\min\,(lu, u) \leq \mu_n \leq M + \max\min\,(lu, u)$$

d'où

$$\lambda_n + m \leq \mu_n \leq \lambda_n + M$$

comme $\lambda_n \to +\infty$, alors

$$\frac{\mu_n}{\lambda_n} = O(1)$$

Remarque 1.8 : *Cette propriété n'est autre que la dépendance continue entre les valeurs propres et les coefficients de l'opérateur différentiel.*

1.5.3 Un cas particulier

(voir [23], [21])

Il existe un cas particulier de problèmes singuliers, qui est celui donnant lieu aux polynômes orthogonaux. Soit l'équation

$$p(x)y'' + q(x)y' + \lambda y = 0 \tag{1.28}$$

où $p(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à deux, et $q(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à un. Une telle équation est dite de type hypergéométrique.

Dérivons l'équation (1.30) on obtient

$$p(x)y''' + (p'(x) + q(x))\, y'' + (q'(x) + \lambda)\, y' = 0$$

si l'on pose $(p'(x) + q(x)) = q_1(x)$ qui va être un polynôme de degré au plus égal à 1 et $\mu_1 = (q'(x) + \lambda)$ qui va être une constante, alors $v_1 = y'$ vérifie l'équation

$$p(x)v_1'' + q_1(x)v_1' + \mu_1 v_1 = 0$$

donc $v_1 = y'$est aussi solution d'une équation hypergéométrique.En réitérant ce procédé n fois et en posant $v_n = y^{(n)}$; alors v_n est solution de l'équation

$$p(x)v_n'' + q_n(x)v_n' + \mu_n v_n = 0 \tag{1.29}$$

où

$$q_n(x) = q(x) + np'(x)$$

et

$$\mu_n = \lambda + nq' + \frac{n(n-1)}{2} p''$$

si l'on cherche des solutions de (1.30) sous forme de polynômes de degré n ce qui revient à dire $v_n = y^{(n)}$ =constante, alors

$$\begin{aligned}(1.29) \quad &\Rightarrow \quad \mu_n v_n = 0 \\ &\Rightarrow \quad \mu_n = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda = \lambda_n = -nq' - \frac{n(n-1)}{2}p''\end{aligned}$$

ici $\lambda_n = -nq' - \frac{n(n-1)}{2}p''$ représente non pas le comportement de λ_n, mais sa valeur exacte.

Nous allons à présent donner trois exemples de polynômes orthogonaux issus d'équation hypergéométrique ainsi que leurs comportements lorsque $n \longrightarrow +\infty$ comportements établis grace à la méthode de Stecklov (voir [23])

Exemple 3 : *Le problème*

$$\begin{cases} \left[(1-x^2)\,y'\right]' - \lambda y = 0 \ \textit{sur} \ (-1,1) \\ y(\pm 1) < \infty \end{cases}$$

donne pour fonctions propres les polynômes de Legendre $p_n(x)$ définis par

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$$

qui sont orthogonaux dans $L^2((-1,1))$, de norme égale à

$$\|p_n(x)\| = \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}$$

et pour valeur propres associées

$$\lambda_n = -n\,(n+1) \ \ ie, \ \lambda_n = O(n^2)$$

et lorsque $n \longrightarrow +\infty$

$$p_n(\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right] \ \ \textit{pour} \ \theta \neq \pm\pi$$

Exemple 4 : *Le problème*

$$\begin{cases} xy'' + (1-x)\, y' - \lambda y = 0 \ \text{sur} \ (0,+\infty) \\ y(0) < \infty;\ \exists k > 0 \ \text{tel que} \ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x^k} < \infty \end{cases}$$

donne pour fonctions propres les polynômes de Laguerre $L_n(x)$ *définis par*

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x}\right)$$

qui sont orthogonaux dans $L^2\left((0,+\infty), e^{-x}dx\right)$ *,de norme egale à*

$$\| L_n(x) \| = 1$$

et pour valeurs propres associées

$$\lambda_n = -n \ ie \ \lambda_n = O(n)$$

et lorsque $n \longrightarrow +\infty$

$$L_n(x) \approx \pi^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{x}{2}} n^{\frac{-1}{4}} x^{\frac{-1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right)$$

et ceci pour tout x *fini dans* $(0,+\infty)$.

Exemple 5 : *Le problème*

$$\begin{cases} y'' - 2xy' - \lambda y = 0 \ \text{sur} \ IR \\ \exists k > 0 \ \text{tel que} \ \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x^k} < \infty \end{cases}$$

donne pour fonctions propres les polynômes d'Hermite $H_n(x)$, *définis par*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

qui sont orthogonaux dans $L^2\left(IR, e^{-x^2}dx\right)$ *,de norme egale à*

$$\| H_n(x) \| = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et pour valeurs propres associées

$$\lambda_n = -2n \ ie \ \lambda_n = O(n)$$

et lorsque $n \longrightarrow +\infty$

$$H_n(x) \approx 2^{\frac{n+1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} n^{\frac{n}{2}} e^{\frac{-n}{2}} \cos\left(2\sqrt{n+1}x - \frac{n\pi}{2}\right)$$

et ceci pour tout x *fini.*

Remarque 1.9 : *Soit l'équation hypergéométrique*

$$p(x)y'' + q(x)y' + \lambda y = 0 \tag{1.30}$$

on a vu que si l'on cherche des polynômes pour solution, alors

$$\lambda_n = -nq' - \frac{n(n-1)}{2}p''$$

si de plus ces polynômes sont orthogonaux sur un intervalle (a,b), *par rapport à un poids* $\rho(x)$; *doit être vérifiée la condition*

$$\left[p(x)\rho(x)x^k\right]_a^b = 0$$

pour $x \in (a,b)$, *et* $k \in \mathbf{N}$. *Comme* $\rho(x) > 0$ *c'est* $p(x)$ *qui devra s'annuler aux deux bords* a, b *cela est possible lorsque* $p(x)$ *est un polynôme de degré 2, mais si* $p(x)$ *est un polynôme de degré 1 il ne pourra s'annuler que sur l'un des deux bords , et dans ce cas c'est* $\rho(x)$ *qui devra s'annuler sur l'autre bord disons* b, *comme* $\rho(x) > 0$ *on devrait avoir* $b = +\infty$ *et* $\lim_{x\to b} \rho(x) = 0$; *de même si* $p(x)$ *est une constante alors on devrait avoir* $a = -\infty$ *et* $b = +\infty$; *et* $\lim_{x\to\pm\infty} \rho(x) = 0$. *Donc en résumé si* $p(x)$ *est un polynôme de degré inferieur ou égal à 1 l'intervalle* (a,b) *serait semi fini ou infini, d'un autre côté si* $p(x)$ *est de degré inferieur ou égal à 1, alors* $p''(x) = 0$ *et donc les valeurs propres sont données par*

$$\lambda_n = -nq'$$

ie

$$\lambda_n = O(n)$$

donc (intuitivement) il y'aurait correspondance entre $\lambda_n = O(n)$ *et* (a,b) *intervalle infini, en ce qui concerne les polynômes orthogonaux.*

Chapitre 2

Espaces de Sobolev associés à un problème de Sturm-Liouville

Dans ce second chapitre on va introduire des espaces fonctionnels que l'on conviendra d'appeler "espaces de Sobolev associés à un problème de Sturm-Liouville", et on tentera d'établir une injection similaire à l'injection de Sobolev "classique", et ceci afin d'établir un critère de régularité.

Dans ce chapitre **R** désignera le corps des réels, C celui des complexes et **N** désignera l'ensemble des entiers naturels

2.1 Espaces fondamentaux

(voir [28])

Rappelons d'abord les définitions et notations des espaces fonctionnels fondamentaux.

Définition 2.1 *Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \to \mathbf{R}$*

•L'espace $L^2(\Omega)$

$$L^2(\Omega) = \left\{ f;\ \int_\Omega |f|^2\, dx < \infty \right\}$$

l'espace de Lebesgue $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(f,g)_{L^2} = \int_\Omega fg dx$$

est un espace de Hilbert. Si $\rho(x)$ est une fonction non négative sur Ω,on peut définir l'espace pondéré

$$L^2_\rho(\Omega) = \left\{ f;\ \int_\Omega |f|^2 \rho(x) dx < \infty \right\}$$

et le produit scalaire

$$(f,g) = \int_\Omega fg\rho(x) dx$$

en fait un espace de hilbert. On peut plus généralement définir

$L^p(\Omega) = \{f;\ \int_\Omega |f|^p dx < \infty\} \quad p > 0.$

•L'espace $\mathcal{E}(\Omega)$

$$\mathcal{E}(\Omega) = \{f;\ f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \Omega\}$$

muni de la topologie engendrée par la famille de semi-normes

$$p_{k,m}(f) = \sup_{\alpha \leq m} \sup_{x \in K} \left| \frac{d^\alpha x}{dx^\alpha} \right|$$

où K parcourt l'ensemble des compacts de Ω, m celui des entiers naturels, $\mathcal{E}(\Omega)$ est alors complet.

•L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$

On appelle support de la fonction f l'ensemble noté $Suppf$ défini par

$$Suppf = \overline{\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}}$$

alors

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in \mathcal{E}(\Omega);\ Suppf \text{ est un compact de } \Omega\}$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ est aussi appelé espace des fonctions test

On dira qu'une suite de fonctions $(f_j)_j$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}(\Omega)$ *ssi*

i) il existe un compact K de Ω tel que $Supp f_j \subset K$ $\forall j$.

ii) $\forall \alpha \in \mathbf{N}$ la suite $\left(\dfrac{d^\alpha f_j}{dx^\alpha}\right)_j$ tend vers zéro uniformemment sur K.

•L'espace$\mathcal{D}'(\Omega)$

C'est l'espace des distributions sur Ω, il constitué des formes linéaires

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{C}$$

vérifiant pour toute suite $(f_j)_j$ de $\mathcal{D}(\Omega)$

$$f_j \underset{\mathcal{D}(\Omega)}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \langle T, f_j \rangle \underset{\mathbf{C}}{\longrightarrow} 0$$

le symbole $\langle .,. \rangle$ désigne le crochet de dualité entre$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

•L'espace $\mathcal{E}'(\Omega)$

L'espace des distributions à support compact sur Ω noté $\mathcal{E}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathcal{E}(\Omega)$ ses éléments sont caractérisés par

$$\begin{aligned} T &\in \mathcal{E}'(\Omega) \text{ ssi } \exists c > 0,\ \exists m \in \mathbf{N},\ \exists K \underset{\text{compact}}{\subset} \Omega, \text{ tels que} \\ \forall f &\in \mathcal{E}(\Omega) ;\ |\langle T, f \rangle| \leq c \sum_{\alpha \leq m} \sup_{x \in K} \left| \frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} \right| \end{aligned}$$

•L'espace $\mathbf{S}(\mathbf{R})$

L'espace des fonctions à décroissance rapides noté $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ est donné par

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}) = \left\{ f \in \mathcal{E}(\mathbf{R}) ;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{N},\ \lim_{x \to \pm\infty} \left| x^\alpha \frac{d^\beta f}{dx^\beta} \right| = 0 \right\}$$

muni de la famille de semi normes $p_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in IR} \left| x^{\alpha} \frac{d^{\beta} f}{dx^{\beta}} \right|$, ce qui en fait un espace complet.

On peut définir l'espace des fonctions à décroissance rapide sur un ouvert semi fini (autre que $\mathbf{R}$) comme étant l'espace des fonctions pronlongeables en fonction de $\mathbf{S}(\mathbf{R})$.

•L'espace $\mathbf{S}'(\mathbf{R})$

L'espace des distributions tempérées noté $\mathbf{S}'(\mathbf{R})$ est le dual topologique de $\mathbf{S}(\mathbf{R})$, ses éléments sont caractérisés par

$$\begin{aligned} T &\in \mathbf{S}'(\mathbf{R}) \text{ ssi } \exists c > 0,\ \alpha, \beta \in \mathbf{N} \text{ tels que} \\ \forall f &\in \mathbf{S}(\mathbf{R});\ |\langle T, f \rangle| \leq c \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| x^{\alpha} \frac{d^{\beta} f}{dx^{\beta}} \right| \end{aligned}$$

•Transformée de Fourier dans $\mathbf{S}'(\mathbf{R})$

Pour tout $f \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$ on notera $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x\xi} f(x) dx$$

ou encore

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

et dans ce cas pôur toute distribution tempérée $T \in \mathbf{S}'(\mathbf{R})$ on notera $\hat{T}$ la transformée de Fourier de T définie par

$$\left\langle \hat{T}, f \right| = \left\langle T, \hat{f} \right| \ , \forall f \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$$

Dans les espaces de suites que l'on va introduire, $a = (a_n)_n$ et $b = (b_n)_n$ désignent des suites réelles ou complexes.

•L'espace $l^2(\mathbf{N})$

L'espace des suites à carrés sommables est défini par

$$l^2(\mathbf{N}) = \left\{ (a_n)_n ;\ \sum_n |a_n|^2 < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$(a,b)_{l^2} = \sum_n a_n \overline{b_n}$$

c'est un espace de Hilbert.

•L'espace $s(\mathbf{N})$

L'espace des suites à décroissance rapide noté $s(\mathbf{N})$ est l'espace des suites $a = (a_n)_n$ vérifiant

$$\forall \alpha \in \mathbf{N},\ \sum_n n^\alpha |a_n| < \infty$$

il est muni de la famille de semi normes

$$\forall \alpha \in \mathbf{N},\ q_\alpha(a) = \sum_n n^\alpha |a_n|$$

•L'espace $s'(\mathbf{N})$

L'espace des suites à croissance lente noté $s'(\mathbf{N})$ est le dual de $s(\mathbf{N})$, ses éléments sont les suites $(a_n)_n$ vérfiant

$$\exists k > 0;\ \sum_n \frac{|a_n|}{(1+n^2)^k} < \infty$$

•Les espaces $H^s(\mathbf{R})$

L'espace de Sobolev d'exposent $s \in \mathbf{R}$ noté $H^s(\mathbf{R})$ est défini par

$$\begin{aligned} H^s(\mathbf{R}) &= \left\{ u \in \mathbf{S}'(\mathbf{R}) ; \int_{\mathbf{R}} \left| \hat{u}(\xi) \right|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi < \infty \right\} \\ &= \left\{ u \in \mathbf{S}'(\mathbf{R}) ; \hat{u}(\xi) \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \in L^2(\mathbf{R}) \right\} \end{aligned}$$

muni du produit scalaire

$$(u,v)_s = \int_{\mathbf{R}} \hat{u}(\xi)\, \hat{v}(\xi) \left(1+\xi^2\right)^s d\xi$$

c'est un espace de hilbert. Les espaces $H^s(\mathbf{R})$ s'emboitent comme suit

$$H^{s_1}(\mathbf{R}) \hookrightarrow H^{s_2}(\mathbf{R}) \text{ si } s_1 \geq s_2$$

où le symbole $\hookrightarrow$ désigne une injection continue; *ie* l'injection canonique

$$i : H^{s_1} \longrightarrow H^{s_2}$$

$$u \longmapsto u$$

est continue, l'injection canonique étant linéaire cela revient à dire

$$\|u\|_{s_1} \leq c \|u\|_{s_2}$$

c étant une constante indépendante de u. Si Ω est un ouvert on définit l'espace $H^s(\Omega)$ comme suit

$$H^s(\Omega) = \{u;\ u = U|_\Omega \text{ où } U \in H^s(\mathbf{R})\}$$

($U|_\Omega$ désignant la réstriction de U à Ω) $H^s(\Omega)$ sera muni de la norme

$$\|u\|_s = \inf_{u=U|_\Omega} \|U\|_s$$

Remarque 2.1 *les espaces de Sobolev peuvent être introduits différemment, en effet pour $k \in \mathbf{N}$, $H^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées au (sens des distributions) d'ordre inférieur ou égal à k sont dans $L^2(\Omega)$, on le munit du produit scalaire*

$$(u,v)_k = \sum_{m\leq k} \left(\frac{d^m u}{dx^m}, \frac{d^m v}{dx^m}\right)_{L^2}$$

Pour $0 < \sigma < 1$ l'espace $H^\sigma(\Omega)$ est constitué des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ dont l'expression

$$\|u\|_\sigma = \left\{\int_\Omega |u|^2\, dx + \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(s)-u(t)|}{|s-t|^{1+2\sigma}} ds dt\right\}^{\frac{1}{2}}$$

est finie, et par suite pour tout $s \in \mathbf{R}^+$ $s = [s]+\sigma$, $H^s(\Omega)$ sera l'ensemble des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ dont l'expression

$$\|u\|_s = \sum_{m \leq [s]} \left\| \frac{d^m u}{dx^m} \right\|_\sigma$$

est finie. Pour $s \in \mathbf{R}^+$ $H^{-s}(\Omega)$ sera défini comme étant le dual topologique de l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$.

Théorème 2.1 *(Injection de Sobolev)*
Soient $s \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, tels que $s > \frac{1}{2} + k$, alors

$$H^s(\mathbf{R}) \hookrightarrow C_0^k(\mathbf{R})$$

$C_0^k(\mathbf{R})$ étant l'espace des fonctions C^k sur $\mathbf{R}$ et nulles à l'infini, il est normé par $\|f\|_{C_0^k(\mathbf{R})} = \max_{m \leq k} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| f^{(k)}(x) \right|$, ce qui en fait un espace de Banach.

preuve. Supposons d'abord que $k = 0$

On a l'égalité

$$|u(\xi)| = \left(1+\xi^2\right)^{\frac{-s}{2}} \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} |u(\xi)|$$

par l'inégalité de Hölder on a

$$\int |u(\xi)| = \left(\int \frac{1}{(1+\xi^2)^s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \left(1+\xi^2\right)^s |u(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

comme par hypothèse $2s > 1$ alors

$$\int \frac{1}{(1+\xi^2)^s} d\xi = c < \infty$$

donc (2.1) implique que $L^2_{\rho_s}(\mathbf{R})$ $\left(\rho_s = (1+\xi^2)^s\right)$, s'injecte continument dans $L^1(\mathbf{R})$

Du fait que la transformée de Fourier est un isomorphisme (topologique) entre $L^2_{\rho_s}(\mathbf{R})$ et $H^s(\mathbf{R})$ (voir [28]) on a que

$$H^s(\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathcal{F}L^1(\mathbf{R})$$

$\mathcal{F}L^1(\mathbf{R})$ désignant l'image de $L^1(\mathbf{R})$ par la transformée de Fourier. Or si $f \in L^1(\mathbf{R})$, la fonction

$$\xi \longmapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$$

est continue sur $\mathbf{R}$ pour presque tout x; d'un autre côté $f(x)e^{-2i\pi x\xi}$ est dominée par $|f(x)|$ qui est intégrable , donc $\hat{f}(\xi)$ est continue, et de plus

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, dx$$

Le fait que $\hat{f}(\xi)$ soit nulle à l'infini est dû au théorème de Riemann-Lebesgue (voir [28]) donc

$$\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}) \hookrightarrow C_0^0(\mathbf{R})$$

d'ou le résultat

$$H^s(\mathbf{R}) \hookrightarrow C_0^0(\mathbf{R}) \text{ dès que } s > \frac{1}{2}$$

Supposons maintenant que $k \in \mathbf{N}^*$.

Soit $\alpha \leq k$ alors l'application (linéaire)

$$D^\alpha = \frac{d^\alpha}{d\xi^\alpha} : H^s(\mathbf{R}) \longrightarrow H^{s-k}(\mathbf{R})$$

est continue, en effet

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha u\|^2_{H^{s-k}(\mathbf{R})} &= \int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s-k} \left|(\widehat{D^\alpha u})\,(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= c\int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s-k} |\xi|^{2\alpha} \left|\hat{u}\,(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq c'\int_{\mathbf{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} \left|\hat{u}\,(\xi)\right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

ceci grace aux propriètés de la transformée de Fourier, et à l'inégalité $|\xi|^{2\alpha} \leq (1+\xi^2)^k$ d'où

$$\|D^\alpha u\|^2_{H^{s-k}(\mathbf{R})} \leq c'\, \|u\|^2_{H^s(\mathbf{R})}$$

d'un autre côté et d'après le premier cas étudié

$$H^{s-k}(\mathbf{R}) \hookrightarrow C_0^0(\mathbf{R})$$

soit

$$\|D^\alpha u\|_{C_0^0(\mathbf{R})} = \sup_{x\in\mathbf{R}} |D^\alpha u| \leq c' \|u\|_{H^s(\mathbf{R})} \text{ pour tout } \alpha \leq k$$

donc

$$\max_{\alpha\leq k}\sup_{x\in\mathbf{R}} |D^\alpha u| = \|u\|_{C_0^k(\mathbf{R})} \leq c' \|u\|_{H^s(\mathbf{R})}$$

d'où le résultat.

Remarque 2.2 *Dans le cas monovariable l'injection de Sobolev reste valable pour tout intervalle Ω de $\mathbf{R}$, i.e $H^s(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, $s > \frac{1}{2} + k$, mais pour le cas de plusieurs variables des hypothèses supplémentaire sont à émettre sur Ω (par exemple propoiété du cône , ou propoiété du segment ou de m-prolongement) (voir [1])*

Remarque 2.3 *L'injection de Sobolev n'est pas "améliorable" dans le sens ou pour $s < \frac{1}{2}$ $H^s(\mathbf{R}) \hookrightarrow C(\mathbf{R})$ n'est plus valable, c'est pourquoi $s_0 = \frac{1}{2}$ ($s_0 = \frac{n}{2}$, pour $\mathbf{R}^n$) est appelé indice critique.*

2.2 Construction des espaces de Sobolev associés à un problème de Sturm-Liouville

2.2.1 Introduction par un exemple

Soit le problème

$$\begin{cases} lu = -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(a) = 0, \; 0 < a < \infty \end{cases} \tag{2.2}$$

les fonctions propres et valeurs propres de (2.2) sont données par

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \\ \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a les propriètés suivantes

i) L'opérateur l est auto-adjoint lorsqu'il agit sur l'espace des fonctions de classeC^∞

sur $\Omega = (0, a)$ et nulles à l'exterieur de Ω (on dit que l est essentillement auto-adjoint), espace qui sera plongé dans $L^2(\Omega)$ pour récupérer une steucture préhilbertienne; en effet soient $u, v \in \mathcal{E}(\Omega)$ et nulles à l'exterieur de Ω

$$(lu, v)_{L^2} = \int_0^a -u''v dx$$

une double intégration par parties donne

$$\begin{aligned}(lu, v)_{L^2} &= [-u'v]_0^a + [uv']_0^a - \int_0^a uv'' dx \\ &= \int_0^a u(-v'')\, dx \\ &= (u, lv)_{L^2}\end{aligned}$$

ii) $\{\phi_n(x)\}_n$ étant une base orthonormée de $L^2(\Omega)$, une fonction $u(x)$ vérifiant les même hypothèses que dans (2.2.1) est (à fortiori) developpable en serie

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} a_n \phi_n(x)$$

où

$$a_n = a_n(u) = \int_0^a u(x)\phi_n(x) dx = (u(x), \phi_n(x))_{L^2}$$

de plus la convergence est uniforme.

De même

$$a_n(lu) = (lu, \phi_n)_{L^2} = (u, l\phi_n)_{L^2} = (u, \lambda_n \phi_n)_{L^2} = \lambda_n (u, \phi_n)_{L^2}$$

soit que

$$a_n(lu) = \lambda_n a_n(u)$$

de proche en proche on arrive à

$$\begin{aligned}a_n(l^p u) &= \lambda_n^p a_n(u) \\ &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^{2p} n^{2p} a_n(u)\end{aligned}$$

comme $l^p u$ est continue sur Ω (suite aux hypothèses émises sur u)

$$\begin{aligned}
|a_n(l^p u)| &= \left|\int_0^a l^p u \phi_n dx\right| \\
&\leq \left(\int_0^a |l^p u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^a |\phi_n|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{par l'inégalité de Hölder} \\
&\leq \left(\int_0^a |l^p u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} a_n(l^p u) = O(1) \\ a_n(l^p u) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{2p} n^{2p} a_n(u) \end{array}\right\} \Rightarrow a_n(u) = O(n^{-2p})$$

et ceci pour tout $p \in \mathbf{N}$, donc

$$(a_n(u))_n \in s(\mathbf{N})$$

d'un autre côté

$$u(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} a_n(u)\,\phi_n(x) \Rightarrow u'(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} a_n(u)\,\phi_n'(x)$$

$$\Rightarrow u'(x) = \sum_{n\in\mathbf{N}^*} a_n(u)\,\frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi}{a}x$$

or cette dernière série converge uniformément, car

$$\left|a_n(u)\,\frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{n\pi}{a}x\right| \leq \left|a_n(u)\,\frac{n\pi}{a}\right|$$

et comme $(a_n(u))_n$ est à décroissance rapide

$$\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{n\pi}{a} a_n(u)$$

converge, d'où (par le critère de Weierstrass) la convergence uniforme.

Le même raisonnement réitéré permet de dire que la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} a_n(u)\,\phi_n(x)$ converge vers $u(x)$ dans$\mathcal{E}(\Omega)$, inversement si $(a_n)_n \in s(\mathbf{N})$ alors $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} a_n\phi_n(x)$ converge dans $\mathcal{E}(\Omega)$.

iii) Soit à présent $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et soit $(a_n)_n \in s(\mathbf{N})$ telle que

$$u = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n$$

par dualité topologique nous avons

$$\left\langle T, \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n \right\rangle \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \langle T, u \rangle$$

$\langle .,. \rangle$ désignant le crochet de dualité entre $\mathcal{E}(\Omega)$ et $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Par la suite $\tilde{f}$ désignera le prolongement par zéro de la fonction f en dehors de Ω alors

$$\begin{aligned}
\left\langle T, \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n \right\rangle &= \sum_{n=1}^{N} a_n \langle T, \phi_n \rangle \text{ linéarité de } T \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle T, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n, \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n \right\rangle \text{ par orthogonalité} \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle T, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n \right\rangle \text{ par convergence de } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle T, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n, u \right\rangle
\end{aligned}$$

en faisant tendre $N \to +\infty$ dans les deux membres de l'égalité nous avons d'un côté

$$\left\langle T, \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n \right\rangle \longrightarrow \langle T, u \rangle$$

et d'un autre côté

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle T, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n, u \right\rangle \longrightarrow \langle T, u \rangle$$

d'où

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T, \phi_n \rangle \tilde{\phi}_n$$

donc $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ peut se developper en série $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tilde{\phi}_n$.

Si $(a_n)_n \in s(\mathbf{N})$ et $u = \sum a_n \phi_n$, alors

$$\begin{aligned} \langle T, u \rangle &= \left\langle \sum b_n \tilde{\phi}_n, \sum a_n \phi_n \right\rangle \\ &= \sum a_n b_n \text{ par orthogonalité} \end{aligned}$$

d'où

$$\sum a_n b_n < \infty$$

et donc par dualité

$$(b_n)_n \in s'(\mathbf{N})$$

réciproquement si $(b_n)_n \in s'(\mathbf{N})$; il va exister un $p \in \mathbf{N}$, tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^{2p}}$$

converge; ou encore

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^{2p}} \tilde{\phi}_n(x)$$

converge uniformément vers une fonction f

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^{2p}} \tilde{\phi}_n(x) \Rightarrow \left(f, \tilde{\phi}_n\right) = \frac{|b_n|}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^{2p}}$$

soit que

$$b_n = \left(f, l^p \tilde{\phi}_n\right) = \left(l^p f, \tilde{\phi}_n\right)$$

donc les $(b_n)_n$ vont être les coefficients de la distribution

$$T = l^p f$$

l^p à considérer ici au sens faible.

Pour généraliser ce travail à un problème de Sturm-Liouville (régulier ou non) sur un intervalle fini Ω; il n'y'a aucune modification à apporter, sauf peut être l'hypothèse supplementaire sur les fonctions propres, et leurs dérivées successives

$$\left|\phi_n^{(k)}\right| \leq f_k(n) \tag{2.3}$$

et ceci pour tout k, n et tout $x \in \Omega$ (ou du moins sur tout compact K deΩ), où $f_k(n)$ est une fonction des puissances de n (par exemple polynôme d'indéterminée n), hypothèse qui nous permettera d'avoir la convergence dans $\mathcal{E}(\Omega)$.

Remarque 2.4 : *Du fait de la régularité du comportement asymptotique des fonctions propres donné précédemment dans (1.5.1), l'hypothèse (2.3) est généralement vérifiée.*

Sur un intervalle infini on est parfois amené à remplacer $\mathcal{E}(\Omega)$ par $\mathrm{S}(\Omega)$ et $\mathcal{E}'(\Omega)$ par $\mathrm{S}'(\Omega)$ ceci étant conditionné par le fait que les fonctions propres soient dans $\mathrm{S}(\Omega)$, et dans ce cas l'hypothèse (2.3) sera remplacée par $\left|x^p\phi_n^{(k)}\right| \leq f_k(n)$ et ceci pour tout k, n, p et tout $x \in \Omega$ (ou du moins sur tout compact K deΩ). Par la suite nous supposerons que les valeurs propres $\{\lambda_n\}_n$ issues du problème de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} lu = \lambda u \\ \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

sont telles que $\lambda_n \geq 1$, si tel n'est pas le cas nous donnerons la procédure à suivre à la fin de ce paragraphe, sous cette condition on pose pour tout $f = \sum a_n \phi_n$, et tout $s \in \mathbf{R}$

$$l^s f = \sum \lambda_n^s a_n \phi_n$$

et pour tout $T = \sum a_n \bar{\phi}_n$, et tout $s \in \mathbf{R}$

$$l^s T = \sum \lambda_n^s a_n \bar{\phi}_n$$

chose qui nous pemet de poser la définition suivante

Définition 2.2 : *Soit*

$$\begin{cases} lu = \lambda u, \ sur\ \Omega = (a,b) \\ conditions\ aux\ limites \end{cases} \tag{2.4}$$

un problème de Sturm-Liouville de valeurs propres $\{\lambda_n\}$, *et de fonctions propres* $\{\phi_n\}$, *on définit alors les espaces de Sobolev qui lui sont associés, espaces qu'on notera* A^s, *comme suit*
pour tout $s \geq 0$

$$\begin{aligned} A^s &= \left\{ u \in L^2(\Omega)\,;\ l^s u \in L^2(\Omega) \right\} \\ &= \left\{ u = \sum a_n \phi_n;\ \sum |a_n|^2 \lambda_n^{2s} < \infty \right\} \end{aligned}$$

(les deux définitions étant équivalente grâce à l'identité de Parseval)
et pour tout $s < 0$

$$\begin{aligned} A^s &= \left\{ u \in \mathcal{E}'(\Omega)\,;\ l^s u \in L^2(\Omega) \right\} \\ &= \left\{ u = \sum a_n \tilde{\phi}_n;\ \sum |a_n|^2 \lambda_n^{2s} < \infty \right\} \end{aligned}$$

Propriètés:

1) Les A^s ainsi définis munis du produit scalaire

$$(u,v)_{A^s} = (l^s u, l^s v)_{L^2} = \sum a_n b_n$$

sont des espaces de Hilbert, où $u = \sum a_n \phi_n$, et $v = \sum b_n \phi_n$.

Pour montrer que les A^s sont complets, considerons une suite de Cauchy $(f_n)_n$, dans A^s, alors $(l^s f_n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui est complet, donc

$$l^s f_n \underset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} g$$

Posons

$$g_n = \int g \phi_n dx$$

alors

$$\begin{aligned} g &= \sum g_n \phi_n \\ &= \sum \frac{g_n}{\lambda_n^s} \lambda_n^s \phi_n \\ &= l^s \left(\sum \frac{g_n}{\lambda_n^s} \phi_n \right) \\ &= l^s h \ \left(h = \sum \frac{g_n}{\lambda_n^s} \phi_n \right) \end{aligned}$$

comme $h \in A^s$, car $l^s h = g \in L^2(\Omega)$, et

$$l^s f_n \underset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} l^s h \Leftrightarrow f_n \underset{A^s}{\longrightarrow} h$$

alors A^s est complet. La norme de A^s étant

$$\|u\|_{A^s}^2 = (u, u)_{A^s} = (l^s u, l^s u)_{L^2} = \sum |a_n|^2 \lambda_n^{2s}$$

où $u = \sum a_n \phi_n$, ces égalités montrent que A^s est isométrique à $L^2(\Omega)$ par l^s.

2) L'espace A^0 est identifié à L^2

3) Les espaces A^s s'injectent continument comme suit

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \Rightarrow A^{s_2} \hookrightarrow A^{s_1}$$

en effet

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \Rightarrow \lambda_n^{2s_1} \leq \lambda_n^{2s_2}$$

si $u = \sum a_n \phi_n$ alors

$$a_n^2 \lambda_n^{2s_1} \leq a_n^2 \lambda_n^{2s_2}$$

et par suite

$$\|u\|_{A^{s_1}}^2 = \sum a_n^2 \lambda_n^{2s_1} \leq \sum a_n^2 \lambda_n^{2s_2} = \|u\|_{A^{s_2}}^2$$

donc

$$\|u\|_{A^{s_1}}^2 \leq \|u\|_{A^{s_2}}^2$$

et de la même manière

$$s_1 \leq s_2 \leq 0 \leq\Rightarrow A^{s_2} \hookrightarrow A^{s_1}$$

4) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans A^s, en effet

l'opérateur l^s est bijectif de $\mathcal{D}(\Omega)$ sur lui même, car si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $Supp f = K$ (compact de Ω) alors

$$f(x) = \sum a_n \phi_n(x) = \sum a_n \breve{\phi}_n(x)$$

où $(a_n)_n \in s(\mathbf{N})$ et $\breve{\phi}_n = \begin{cases} \phi_n \text{ sur } K \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$ alors

$$\begin{aligned} l^s f &= \sum a_n \lambda_n^s \breve{\phi}_n \\ &= \sum \alpha_n \breve{\phi}_n \quad (\alpha_n = a_n \lambda_n^s) \end{aligned}$$

or comme les λ_n ont un comportement asymptotique polynômiale en n ($\lambda_n = O(n^2)$), alors $(\alpha_n)_n \in s(\mathbf{N})$, donc $l^s f = \sum \alpha_n \breve{\phi}_n$ est de classe C^∞, comme $\breve{\phi}_n = 0$ en dehors de K alors $Supp\, l^s f \subset K$, ce qui permet de conclure que

$$f \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow l^s f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et de la même manière on arrive à montrer la réciproque, donc

$$f \in \mathcal{D}(\Omega) \Longleftrightarrow l^s f \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Soit $f \in A^s$ ie $l^s f \in L^2(\Omega)$, comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il va exister une suite $(g_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$g_n \underset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} l^s f$$

la suite $(g_n)_n$ pouvant s'écrire, d'après le point précédent sous la forme $(l^s f_n)_n$ avec $(f_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$, d'où

$$l^s f_n \underset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} l^s f$$

et donc

$$f_n \underset{A^s}{\longrightarrow} f$$

ce qui permet de conclure de la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans A^s.

5) On définit l'espace A^∞ par

$$A^\infty = \bigcap_{s \in \mathbb{N}} A^s$$

il sera muni de la famille de normes

$$\{\|u\|_{A^s}\}_{s \in \mathbb{N}}$$

ce qui en fait un espace métrisable de distance définie par

$$d(u,v) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|u-v\|_{A^j}}{1+\|u-v\|_{A^j}}$$

Remarque 2.5 *Nous avons emis l'hypothèse $\lambda_n \geq 1$, supposons que tel n'est pas le cas, alors plusieurs cas de figure se présente à nous:*

1) *Le problème (2.4) admet un nombre fini de valeurs propres négatives, dans ce cas on considérera l'opérateur $(l + (1-\lambda_*)\, Id)$ en lieu et place de l, où λ_* est la plus petite valeur propre négative.*

2) *Le problème (2.4) n'admet que des valeurs propres négatives, dans ce cas nous considérerons l'opérateur $(Id - l)$ à la place de l.*

3) *Le problème (2.4) admet des valeurs propres aléatoirement distribuées sur la droite réelle (c'est le cas des problèmes du type*

$$\begin{cases} -(py')' + qy = \lambda\rho y \text{ sur } (a,b) \\ (\cos\alpha)\, y(a) - (\sin\alpha)\, py'(a) = 0 \\ (\cos\beta)\, y(b) - (\sin\beta)\, py'(b) = 0 \end{cases}$$

où $0 \leq \alpha < \pi$, et $0 < \beta \leq \pi$, p change de signe dans (a,b)) dans ce cas nous sommes obligés de passer par la théorie de l'interpolation (ou théorie des espaces intermédiaires), donnons un aperçu de cette théorie:
•*Soient X et Y deux espaces de Hilbert séparables tels que $X \hookrightarrow Y$ et X dense dans Y, de produits scalaires respectifs $(.,.)_X$ et $(.,.)_Y$.*

***Théorème 2.2** [22]: L'espace X peut être défini comme étant le domaine d'un opérateur (non borné) Λ dans Y, auto-adjoint positif (opérateur qui n'est pas défini de manière unique), et tel que la norme de X soit équivalente à la norme du graphe de Λ*

$$\left(\|u\|_Y^2 + \|\Lambda u\|_Y^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in X$$

(L'opérateur Λ peut être construit comme suit:
Soit $D(S)$ l'ensemble des u tels que la forme anti-linéaire $v \longmapsto (u,v)_X$ soit continue pour la topologie induite par Y sur X, on définit alors l'opérateur S comme étant de domaine $D(S)$ tel que $(u,v)_X = (Su,v)_Y$, sous ces conditions on définit alors Λ comme étant $\Lambda = S^{\frac{1}{2}}$.

***Définition 2.3** : On définit les espaces intermédiaire entre X et Y comme suit*

$$[X,Y]_\theta = D\left(\Lambda^{1-\theta}\right) \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

normés par

$$\left(\|u\|_Y^2 + \left\|\Lambda^{1-\theta} u\right\|_Y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

et on pose $[X,Y]_0 = X$, et $[X,Y]_1 = Y$.

Appliquons ces résultats à notre problème: soit m un entier positif on définit $A^m (= \{u \in L^2(\Omega);\ l^m u \in L^2(\Omega)\})$ comme précédemment, l^m ayant un sens pour m entier, si A^m et A^{m+1} sont deux espaces d'exposents entiers consécutifs, on pose alors

$$\left[A^{m+1}, A^m\right]_\theta = A^{m+1-\theta} \quad 0 < \theta < 1$$

et les espaces d'exposents négatifs peuvent être introduits par dualité.

Remarque 2.6 : *Rappelons que l'espace de Sobolev H^s à été défini par*

$$H^s = \left\{u \in \mathbf{S}'(\mathbf{R});\ \hat{u}(\xi)\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \in L^2(\mathbf{R})\right\}$$

où $\hat{u}(\xi)$ *désigne la transformée de Fourier de* u, *par analogie* A^s *peut être défini comme*

$$A^s = \left\{u; \left(1+\lambda_n^2\right)^s \hat{u}_n \in l^2(\mathbf{N})\right\}$$

où $\hat{u}_n = \int u\phi_n$ *désigne non pas la transformée de Fourier mais le coefficient de Fourier de* u.

On a vu aussi que H^s *peut être défini comme étant l'espace des fonctions dont les dérivées sont dans* L^2, A^s *est défini de la même manière mais en remplaçant l'opérateur de dérivation par l'opérateur de Sturm-Liouville* l.*C'est cette analogie qui justifie l'appélation espaces de Sobolev associés à un problème de Sturm-Liouville.*

2.2.2 Indices critiques

On reprend toujours le même problème (2.4), et on cherche à trouver à partir de quel indice s_0 les espaces A^s associés au problème (2.4) s'injectent dans l'espace des fonctions continues $C\left(\bar{\Omega}\right)$ (normé par la norme du sup).Il est clair qu'un tel s_0 (s'il existe) est strictement positif, car les espaces A^s pour s négatif sont des espaces de pseudo-fonctions, et pour $s = 0$ A^0 est identifié à L^2.

Comme les A^s $(s > 0)$ s'emboitent les uns dans les autres il suffit de trouver le plus petit indice (exposent) s_0 tel que $A^{s_0} \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$, et alors tout les A^s tels que $s \geq s_0$ vérifiront lamême injection, ce plus petit indice sera s_0 sera appelé indice critique.

Cas Ω borné:

On reprend toujours le même problème (2.4) et on suppose dans ce premier cas que Ω est borné, si $\{\lambda_n\}$ et $\{\phi_n\}$ sont les valeurs propres et fonctions propres issues de (2.4) (les $\{\phi_n\}$ supposées normalisées), et soient A^s les espaces qui lui sont associés.On sait que les λ_n ce comportent comme n^2, ce qui nous permet d'énoncer la proposition suivante

Proposition 2.1 : *Soit A^s comme precédemment définis, alors*

$$A^s \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$$

dès que

$$s > \frac{1}{4}$$

preuve. :Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors

$$\varphi(x) = \sum a_n \phi_n(x)$$

(avec convergence uniforme)

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum a_n \phi_n(x) \Rightarrow |\varphi(x)| \leq \sum |a_n \phi_n(x)| = \sum \left| a_n \lambda_n^s \frac{\phi_n(x)}{\lambda_n^s} \right| \\
&\Rightarrow |\varphi(x)| \leq \left(\sum \left| a_n^2 \lambda_n^{2s} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \left| \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n^{2s}} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (par l'inégalité de Hölder)} \\
&\Rightarrow |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{A^s} \left(\sum \left| \frac{d}{\lambda_n^{2s}} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \text{ les } \phi_n \text{ étant bornées indépendemment de } n
\end{aligned}$$

et d étant une constante

$$\frac{d}{\lambda_n^{2s}} \sim \frac{1}{n^{4s}} \text{ car } \lambda_n = O(n^2)$$

et comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{4s}}$ converge pour $s > \frac{1}{4}$,

Donc dès que $s > \frac{1}{4}$ on a

$$|\varphi(x)| \leq c \|\varphi\|_{A^s}$$

c étant une constante indépendente de φ, et par suite

$$\|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c \|\varphi\|_{A^s} \tag{2.5}$$

Soit à présent $f \in A^s$, il existe alors (par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans A^s) une suite $\{\varphi_n\}_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\varphi_n \xrightarrow[A^s]{} f \tag{2.6}$$

ce qui fait de $\{\varphi_n\}_n$ une suite de Cauchy dans A^s, l'inégalité (2.5) implique alors que $\{\varphi_n\}_n$ est de Cauchy dans $C\left(\bar{\Omega}\right)$ qui est complet, donc

$$\varphi_n \underset{C(\bar{\Omega})}{\longrightarrow} \varphi \in C\left(\bar{\Omega}\right) \tag{2.7}$$

(2.6) et (2.7) permettent de conclure que

$$f = \varphi \text{ } pp \text{ sur } \Omega$$

Donc f est égale presque partout à une fonction continue, comme justement A^s est défini à partir d'éléments de L^2 qui sont des classes de fonctions égales presque partout, alors f admet un représentant continu ■

Nous allons montrer à présent que l'injection $A^s \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$ pour $s > \frac{1}{4}$ ne peut être "améliorée" (ie il n'existe pas de $s_0 \leq \frac{1}{4}$ tel que $A^{s_0} \hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$), pour cela considérons l'exemple

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

qui donne la suite de valeurs propres$\lambda_n = n^2$ et la suite de fonctions propres associées $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$, et soit A^s l'espace associé

$$A^s = \left\{ u \in L^2((0,\pi));\ u = \sum_{n\geq 1} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx;\ \ \sum_{n\geq 1} a_n^2 n^{4s} < \infty \right\}$$

et considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ 1 \text{ si } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \text{ si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$f(x) \in L^2((0,\pi)) \Rightarrow f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin nx dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos n\frac{\pi}{4} - \cos n\frac{\pi}{2}}{n} \end{aligned}$$

soit que

$$|a_n| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{n} \Rightarrow a_n^2 \leq \frac{2}{\pi} \frac{4}{n^2}$$

et par suite

$$\sum_{n\geq 1} a_n^2 n^{4s} \leq \frac{8}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2-4s}}$$

comme la série converge pour

$$2 - 4s > 1 \text{ ie } s < \frac{1}{4}$$

alors

$$\|f\|_{A^s} = \sum_{n\geq 1} a_n^2 n^{4s} < \infty \ \forall s < \frac{1}{4}$$

donc $f \in A^s \ \forall s < \frac{1}{4}$ et $f(x)$ n'est ni continue ni égale presque partout à une fonction continue

Remarque 2.7 : *Le même exemple peut servir pour le cas plus général du problème*

$$\begin{cases} -u'' + ru = \lambda u \text{ avec } r \text{ fonction continue} \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

car les valeurs propres λ_n vérifient $\lambda_n = O(n^2)$, et les fonctions propres se comportent comme $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + O(\frac{1}{n})$, donc si l'on néglige le terme $O(\frac{1}{n})$ on retrouve exactement le cas précédent.

Cas Ω non borné:

Comme nous n'avons que les résultats concernant

$$-u'' + qu = \lambda u \text{ sur } \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{R}^+$$

avec $q(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$ un polynôme de dgré $m \geq 2$ vérifiant les hypothèses enoncées à la page 36, nous nous limiterons aux espaces A^s associés à de tels problèmes.

Proposition 1 :

$$A^s \hookrightarrow C_0\left(\mathbf{R}^+\right) \;\; (ou\ C_0(\mathbf{R})\,)$$

dès que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x_0(\lambda_n) n^{\frac{4ms}{m+2}}}$$

converge $x_0(\lambda_n)$ étant le point de retour (rappelons que le point de retour est la solution de l'équation
$(q(x) - \lambda_n) = 0$).

preuve. La preuve étant en tout point identique à celle de la proposition (2.1) il suffit de trouver à partir de quel s la série

$$\sum_n \frac{\phi_n^2(x)}{\|\phi_n\|^2 \lambda_n^{2s}}$$

converge, pour cela reprenons les représentations asymptotiques donner dans (1.5.2)

$$\phi_n^2(x) \leq \frac{1}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}, \;\; \|\phi_n\|^2 \sim \frac{x_0(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}, \text{ et } \lambda_n \sim n^{\frac{2m}{m+2}}$$

donc

$$\sum_n \frac{\phi_n^2}{\|\phi_n\|^2 \lambda_n^{2s}} \leq \sum_n \frac{1}{x_0(\lambda_n)\lambda_n^{2s}} = \sum_n \frac{1}{x_0(\lambda_n) n^{\frac{4ms}{m+2}}}. \;\blacksquare$$

Par exemple, si $q(x) = ax^m$ alors $x_0(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$, et dans ce cas

$$\sum_n \frac{1}{x_0(\lambda_n) n^{\frac{4ms}{m+2}}} = \sum_n \frac{1}{n^{\frac{s}{m+2}} n^{\frac{4ms}{m+2}}}$$

série qui converge dès que

$$\frac{4ms+2}{m+2} > 1$$

soit que

$$s > \frac{1}{4}$$

Cas particulier (polynômes orthogonaux)

Polynómes de Jacobi:

Pour $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, $\beta \geq -\frac{1}{2}$ et $n \in \mathbf{N}$, le problème singulier de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} ly = -\left(1-x^2\right)y'' - \left[\beta - \alpha\left(\alpha+\beta+2x\right)\right]y' = n\left(n+\alpha+\beta+1\right)y \\ y(\pm 1) < \infty \end{cases}$$

donne pour fonctions propres les Polynômes de Jacobi, définis par

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(1-x\right)^{-\alpha}\left(1+x\right)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x\right)^{n+\alpha}\left(1-x\right)^{n+\beta}\right]$$

qui sont associés aux valeurs propres $\lambda_n = n\left(n+\alpha+\beta+1\right)$, et qui sont orthogonaux dans $L^2\left(\left(-1,1\right),\left(1-x\right)^{\alpha}\left(1+x\right)^{\beta}dx\right)$, normés par

$$\left\|p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma\left(n+\alpha+1\right)\Gamma\left(n+\beta+1\right)}{n!\left(2n+\alpha+\beta+1\right)\Gamma\left(n+\alpha+\beta+1\right)}.$$

Pour ne pas avoir à trainer des espaces pondérés on peut considérér les fonctions

$$\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \left(1-x\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1+x\right)^{\frac{\beta}{2}}\frac{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\left\|p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\|}$$

qui forment un système orthonormé dans $L^2\left(\left(-1,1\right),dx\right)$.

Comme

$$\sup\left|\frac{d^k}{dx^k}\frac{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\left\|p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\|}\right| \sim \frac{n^{q+k-\frac{1}{2}}}{2^{k-\frac{\alpha+\beta}{2}}} \quad \text{où } q = \sup\left(\alpha+k,\beta+k\right)$$

donc la condition (2.3) emise dans (2.2.1) est vérifiée ce qui rend légitime la construction des espaces A^s associés au problème de Jacobi.Afin de trouver l'indice critique associé à ces espaces il suffit de reprendre la proposition (2.1), donc il faudra trouver à partir de quel indice s la série

$$\sum \left(\frac{\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}}{n\,(n+\alpha+\beta+1)^s} \right)^2$$

converge, or comme

$$(1-x)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\,(1+x)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\,\frac{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\left\| p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right\|} \leq c \text{ (constante indépendante de } n)$$

et ceci pour tout $\alpha \geq -\frac{1}{2}$, $\beta \geq -\frac{1}{2}$ et $x \in [-1,1]$, cequi donne

$$(1-x)^{\frac{1}{4}}\,(1+x)^{\frac{1}{4}}\,\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)} \leq c$$

ou encore

$$\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)} \leq c' \text{ sur tout compact de } (-1,1)$$

et dans ce cas

$$\sum \left(\frac{\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}}{n\,(n+\alpha+\beta+1)^s} \right)^2 \leq \sum \frac{c'}{n\,(n+\alpha+\beta+1)^{2s}} \sim \sum \frac{1}{n^{4s}}$$

donc dès que $s \geq \frac{1}{4}$, les espaces A^s associés au problème de Jacobi vérifient $A^s \hookrightarrow C([-1,1])$

•Pour montrer que cette injection ne peut être améliorée considérons l'exemple des polynômes de Legendre (qui sont des membres de la famille des polynôme de Jacobi avec $\alpha = \beta = 0$).Donc soit $p_n = p_n^{(0,0)}$, et dans ce cas $\mathcal{P}_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}}p_n$; et $\lambda_n = n(n+1)$, et soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

alors

$$f(x) = \sum c_n \mathcal{P}_n(x)$$

où

$$c_n = \int_{-1}^{1} f(x)\mathcal{P}_n(x)dx = \int_0^1 \sqrt{n+\frac{1}{2}}p_n(x)dx$$

comme

$$(2n+1)\,p_n = p'_{n+1} - p'_{n-1}$$

alors

$$\sqrt{n+\frac{1}{2}}p_n = \frac{1}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\left(p'_{n+1} - p'_{n-1}\right)$$

et par suite

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\ p_{n+1}(x) - p_{n-1}(x)]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\left[p_{n-1}(0) - p_{n+1}(0)\right] \text{ car } p_n(1) = 1 \end{aligned}$$

comme

$$p_{2k+1}(0) = 0 \text{ et } p_{2k}(0) = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

donc

$$c_{2n} = 0$$

et

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2n+\frac{3}{2}}}\left[\frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} + \frac{(-1)^n (2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\right] \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{n+1}(n!)^2\sqrt{2n+\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}\right] \end{aligned}$$

donc, par utilisation de la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, nous avons l'équivalence

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &\sim \frac{(-1)^n \sqrt{2\pi}\,(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\, e^{-2n}}{2^{n+1} 2\pi n^{2n+1} e^{-2n} \sqrt{2n+\frac{3}{2}}} \times 2 \\ &\sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi} n^{\frac{1}{2}} \sqrt{2n+\frac{3}{2}}} \\ &\sim \frac{(-1)^n K}{n} \quad K \text{ étant une constante} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum c_{2n+1}^2 \lambda_{2n+1}^{2s} &\sim \sum \frac{1}{n^2} \left((2n+1)(2n+2)\right)^{2s} \\ &\sim \sum \frac{1}{n^{2-4s}} \end{aligned}$$

dernière série qui converge pour $2-4s > 1$, soit $s < \frac{1}{4}$, et donc $f(x) \in A^s$ pour tout $s < \frac{1}{4}$, et f n'est ni continue ni égale pp à une fonction continue, et par suite $A^s \hookrightarrow C([-1,1])$ ne peut être améliorée. Nous reviendrons ultérieurement sur le cas des polynômes de Legendre.

Polynômes d'Hermite:

Le problème de Sturm-Liouville à l'origine des polynômes d'Hermite est

$$\begin{cases} ly = -y'' + 2xy' = 2ny \\ \exists k > 0; \ \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x^k} < \infty \end{cases}$$

l'opérateur l peut aussi être mis sous la forme $ly = -e^{x^2} \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \frac{d}{dx} y\right)$.Les fonctions propres associées aux valeurs propres $\lambda_n = 2n$, sont polynômes d'Hermite, définis par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}$$

et qui sont orthogonaux dans$L^2\left(\mathbf{R}, e^{-x^2} dx\right)$, normés par

$$\|H_n(x)\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Comme $n = 0$ est une valeur propre de l, on peut considérer l'opérateur $(l + Id)$ à la place de l, opérateur qui aura pour valeurs propres $(2n + 1)$.

Tel que l'on a fait pour les polynômes de Jacobi on peut considérer à la place des $H_n(x)$ les fonctions

$$\mathcal{H}_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

qui forment un système orthonormé dans $L^2(\mathbf{R},dx)$ .Les fonctions $\mathcal{H}_n(x)$ ainsi définies appartiennent à $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ (car de la forme $e^{-\frac{x^2}{2}}$ multiplié par un polynôme)dans ce cas $\mathcal{E}(\mathbf{R})$ est remplacé par $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$ par $\mathbf{S}'(\mathbf{R})$.

Pour pouvoire parler des espaces A^s associés au problème d'Hermite, nous avions imposer l'hypothèse (2.3), à savoir $\left|x^k \frac{d^m}{dx^m} \mathcal{H}_n(x)\right| \leq f(n)$ (et ceci au moins sur tout compact de $\mathbf{R}$); hypothèse qui nous permettait d'avoir la convergence des séries $\sum c_n \mathcal{H}_n(x)$, dans $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ et par dualité dans $\mathbf{S}'(\mathbf{R})$, orpour les problèmes d'Hermite on peut passer outre une telle hypothèse, en effet:Les polynômes d'Hermite normalisés $H_n = \frac{H_n}{\|H_n\|}$ vérifient

i)

$$\begin{cases} H_n' = \sqrt{2n} H_{n-1} \\ \sqrt{2(n+1)} H_{n+1} - 2x H_n + \sqrt{2n} H_{n-1} = 0 \end{cases}$$

ii) Les deux opérateurs

$$\tau_{\pm} = \pm \frac{d}{dx} + x$$

sont adjoint ou transposé l'un de l'autre selon qu'on soit dans $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ plongé dans $L^2(\mathbf{R})$ ou dans la dualité entre $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{S}'(\mathbf{R})$.

iii)

$$\begin{aligned}
\tau_+\mathcal{H}_n(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dH_n(x)}{dx} - xe^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x) + x\mathcal{H}_n(x) \\
&= \sqrt{2n}\mathcal{H}_{n-1}(x) - x\mathcal{H}_n(x) + x\mathcal{H}_n(x) \text{ (d'après i))} \\
&= \sqrt{2n}\mathcal{H}_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
\tau_-\mathcal{H}_n(x) &= -e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dH_n(x)}{dx} + xe^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x) + x\mathcal{H}_n(x) \\
&= -\sqrt{2n}\mathcal{H}_{n-1}(x) + 2x\mathcal{H}_n(x) \text{ (d'après i))} \\
&= -e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\sqrt{2n}H_{n-1}(x) - 2xH_n(x)\right) \\
&= -e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\sqrt{2(n+1)}H_{n+1}(x)\right) \text{ (d'après i))} \\
&= \sqrt{2(n+1)}\mathcal{H}_n(x)
\end{aligned}$$

v) Soit à présent $f \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$, alors f, f' et xf sont dans $L^2(\mathbf{R})$, et donc $\tau_\pm f \in L^2(\mathbf{R})$, on pose

$$f = \sum c_n\mathcal{H}_n(x) = \sum c_n(f)\mathcal{H}_n(x)$$

et comme $\tau_\pm f \in L^2(\mathbf{R})$ alors

$$\tau_\pm f = \sum c_n(\tau_\pm f)\mathcal{H}_n(x)$$

où

$$c_n(\tau_+ f) = (\tau_+ f, \mathcal{H}_n) = (f, \tau_-\mathcal{H}_n) \text{ (d'après ii))}$$

et

$$c_n(\tau_- f) = (\tau_- f, \mathcal{H}_n) = (f, \tau_+\mathcal{H}_n) \text{ (d'après ii))}$$

donc

$$\begin{cases} c_n(\tau_+ f) = \sqrt{2(n+1)}c_n(f) \\ c_n(\tau_- f) = \sqrt{2n}c_{n-1}(f) \end{cases} \quad \text{(d'après iii) et iv))}$$

et comme $\tau_\pm f \in L^2(\mathbf{R})$, par l'identité de Parseval nous avons

$$\sum n c_n^2(f) < \infty$$

Ainsi $\tau_\pm$ réitérés autant de fois et appliqués à $f \in L^2(\mathbf{R})$ permet de dire que $\sum n^k c_n^2(f)$ converge pour tout $k \in \mathbf{N}$; d'où si $f \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$, alors $c_n(f) \in s(\mathbf{N})$. Dufait que $\tau_\pm$ sont une combinaison de dérivation et de multiplication par x ; $f \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$ alors $f = \sum c_n(f)\mathcal{H}_n(x)$ avec convergence dans $\mathbf{S}(\mathbf{R})$; ce qui permet de construire les espaces A^s associés au problème d'Hermite

$$A^s = \left\{ f \in \mathbf{S}'(\mathbf{R}),\ f = \sum c_n(f)\mathcal{H}_n(x);\ \sum (2n+1)^{2s} c_n^2 < \infty \right\}$$

Pour trouver l'indice critique associé on reprend toujours la même méthode;en effet les fonctions $\mathcal{H}_n$ vérifiant sur tout compact de $\mathbf{R}$

$$|\mathcal{H}_n(x)| = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{H_n(x)}{\|H_n\|} \leq \frac{c}{n^{\frac{1}{4}}}$$

et du fait que $\lambda_n = (2n+1)$ on a

$$\sum \frac{\mathcal{H}_n^2}{\lambda_n^{2s}} = \sum \frac{\mathcal{H}_n^2}{(2n+1)^{2s}} \leq \sum \frac{c^2}{n^{\frac{1}{2}}(2n+1)^{2s}}$$

dernière série qui converge pour

$$2s + \frac{1}{2} > 1$$

ie

$$s > \frac{1}{4}$$

donc les espaces A^s associés au problème d'Hermite vérifient

$$A^s \hookrightarrow C_0(\mathbf{R}) \text{ pour } s > \frac{1}{4}$$

•Pour montrer que cette injection n'est pas améliorable considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

alors

$$f(x) = \sum c_n \mathcal{H}_n(x)$$

avec

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathcal{H}_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x)dx \\ &= \frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)dx \end{aligned}$$

comme

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x)$$

alors

$$\begin{aligned} e^{-x^2} H_n(x) &= 2xe^{-x^2} H_{n-1}(x) - e^{-x^2} H'_{n-1}(x) \\ &= -\left[e^{-x^2} H'_{n-1}(x) - 2xe^{-x^2} H_{n-1}(x)\right] \\ &= -\left[e^{-x^2} H_{n-1}(x)\right]' \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \left[-e^{-x^2} H_{n-1}(x)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{H_{n-1}(0)}{(2^n n!\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

comme

$$H_{2k+1}(0) = 0, \text{ et } H_{2k}(0) = (-1)^n \frac{(2k)!}{k!}$$

donc

$$c_{2n} = 0$$

et

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{n+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} n! \left((2n+1)!\right)^{\frac{1}{2}}}$$

donc, par utilisation de la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, nous avons l'équivalence

$$\begin{aligned} c_{2n+1} &\sim \frac{(-1)^n \sqrt{2\pi} 2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{2^{n+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \left[\sqrt{2\pi} (2n+1)^{2n+\frac{3}{2}} e^{-2n-1}\right]^{\frac{1}{2}}} \\ &\sim \frac{(-1)^n 2^n n^n e^{-n}}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{4}} \pi^{\frac{1}{4}} 2^{n+\frac{3}{4}} n^{n+\frac{3}{4}} e^{-n-\frac{1}{2}}} \\ &\sim \frac{K}{n^{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

d'où

$$\sum c_{2n+1}^2 \lambda_{2n+1}^{2s} \sim \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} n^{2s}$$

dernière série qui converge pour $\frac{3}{2} - 2s > 1$ soit $s < \frac{1}{4}$, donc $f(x) \in A^s$ pour tout $s < \frac{1}{4}$, et n'est ni continue ni égale pp à une fonction continue, et par suite $A^s \hookrightarrow C_0(\mathbf{R})$ ne peut être améliorée.

Polynômes de Laguerre

Le problème de Sturm-Liouville donnant lieu aux polynômes de Laguerre est donné par

$$\begin{cases} ly = -xy'' - (1-x)y' = ny \\ y(0) < \infty, \ \exists k > 0; \ \frac{y(x)}{x^k} \end{cases}$$

l'opérateur l peut aussi être mis sous la forme $ly = -e^x \frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right]$.

Les valeurs propres étant $\lambda_n = n$ et les fonctions propres associées les polynômes de Laguerre, qui sont définis par

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n e^{-x} \right)$$

qui sont orthogonaux dans $L^2\left((0, +\infty), e^{-x}dx\right)$ et de norme égale à 1.

Comme pour les polynômes d'Hermite et pour les mêmes raisons on peut considérer l'opérateur $(l + Id)$ au lieu de l. On considère aussi les fonctions

$$\mathcal{L}_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$$

qui formeront un système orthonormé dans $L^2\left((0, +\infty), dx\right)$.

Les fonctions $\mathcal{L}_n(x)$ appartiennent à $\mathbf{S}\left(\mathbf{R}^+\right)$ (car de la forme $e^{-\frac{x}{2}}$ multiplié par un polynôme). L'hypothèse (2.3) est vérifiée car

$$\left| x^k \frac{d^m}{dx^m} \mathcal{L}_n(x) \right| \leq c_{m,k} \left(n+1 \right)^{m+k}$$

la constante $c_{m,k}$ ne dépendant que de m et k.

Donc pour reprendre ce qui précède dès que la série

$$\sum \frac{\mathcal{L}_n^2(x)}{\lambda_n^{2s}}$$

converge on a

$$A^s \hookrightarrow C_0\left(\mathbf{R}^+\right)$$

comme

$$\left|\mathcal{L}_n(x)\right| = e^{-\frac{x}{2}} \left|L_n(x)\right| \leq \frac{c}{n^{\frac{1}{4}}}$$

et ceci pour tout x fini, alors

$$\sum \frac{\mathcal{L}_n^2(x)}{\lambda_n^{2s}} = \sum \frac{\mathcal{L}_n^2(x)}{n^{2s}} \leq \sum \frac{c^2}{n^{\frac{1}{2}} n^{2s}}$$

dernière série qui converge dès que $2s+\frac{1}{2}>1$, ie $s>\frac{1}{4}$, donc

$$A^s \hookrightarrow C_0\left(\mathbf{R}^+\right) \text{ pour } s>\frac{1}{4}$$

•Pour montrer que cette injection n'est pas améliorable considérons la fonction

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } 0\leq x<2 \\ 1 \text{ si } 2\leq x\leq 3 \\ 0 \text{ si } 3<x \end{cases}$$

alors

$$f(x)=\sum c_n\mathcal{L}_n(x)$$

où

$$c_n=\int_0^{+\infty} f(x)\mathcal{L}_n(x)dx=\int_2^3 e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)dx$$

or

$$L_n(x)\sim\pi^{\frac{-1}{2}}e^{\frac{x}{2}}n^{\frac{-1}{4}}x^{\frac{-1}{4}}\cos\left(2\sqrt{n}x-\frac{\pi}{4}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} c_n &\sim \pi^{\frac{-1}{2}}n^{\frac{-1}{4}}\int_2^3 x^{\frac{-1}{4}}\cos\left(2\sqrt{n}x-\frac{\pi}{4}\right)dx \\ &\sim \pi^{\frac{-1}{2}}n^{\frac{-1}{4}}O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\sim \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

et par suite

$$\sum c_n^2\lambda_n^{2s}\sim\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}n^{2s}$$

série qui converge pour $\frac{3}{2}-2s>1$, ie $s<\frac{1}{4}$, donc $f(x)\in A^s$ pour tout $s<\frac{1}{4}$, et n'est ni continue ni égale pp à une fonction continue, et par suite $A^s\hookrightarrow C_0\left(\mathbf{R}^+\right)$ ne peut être améliorée.

Remarque 2.8 1) *Dans les injections établies plus haut nous n'avons pas de réponse concernant le cas litigeux $s = s_0$, où s_0 est l'indice critique*

2) *Revenons un instant sur le cas des polynômes de Legendre qui, rappelons le, sont solutions de l'équation*

$$-\left(1-x^2\right)y'' + 2xy' = n\,(n+1)\,y$$

et qui sont orthogonaux dans $L^2\left((-1,1)\,,dx\right)$.Dans ce cas particulier on peut définir l'espace A^s sur $[-1,1]$ et pas uniquement sur $]-1,1,[$, espace qu'on notera $\mathcal{J}^s$, donc

$$\mathcal{J}^s = \left\{u \in \mathcal{E}'\left([-1,1]\right),\ u = \sum a_n p_n;\ \ \sum a_n^2 n^{4s} < \infty\right\}$$

Ce phénomène particulier est principalement dû au fait que l'opérateur

$$ly = -\left(1-x^2\right)y'' + 2xy'$$

est auto-adjoint dans $\mathcal{E}\left([-1,1]\right)$ plongé dans L^2 ,et au fait que le poids $\rho(x) \equiv 1$.

Ce phénomène ne peut être généralisé, et ceci même pour les polynômes de la même famille des polynômes de Legendre, à savoir les polynômes de Jacobi, pour le voir il suffit de considérer les distributions de Dirac $\delta_{\pm 1}$ concentrées en ± 1; nous savons que $\delta_{\pm 1} \in \mathcal{E}'\left([-1,1]\right)$; et pourtant si l'on suppose que

$$\delta_{\pm 1} = \sum a_n \mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

où

$$\begin{aligned} a_n &= \left\langle \delta_{\pm 1}, \mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\rangle \\ &= \mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(\pm 1) \\ &= \left.(1-x)^{\frac{\alpha}{2}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}}\frac{p_n^{(\alpha,\beta)}}{\left\|p_n^{(\alpha,\beta)}\right\|}\right]_{x=\pm 1} \\ &= 0 \ \ (\textit{si } \alpha > 0, \ \textit{ et } \beta > 0 \textit{ par exemple}) \end{aligned}$$

ce qui signifie $\delta_{\pm 1}$ n'est pas developpable en série de polynômes de Jacobi, bien que $\delta_{\pm 1} \in \mathcal{E}'\left([-1,1]\right)$.

Concernant les espaces $\mathcal{J}^s$ associésau problème de Legendre sur $[-1,1]$ l'injection $\mathcal{J}^s \hookrightarrow C\left([-1,1]\right)$ a lieu dès que $s > \frac{1}{2}$, car

$$\mathcal{P}_n(\pm 1) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}$$

et d'un autre côté

$$|\mathcal{P}_n(x)| \leq \sqrt{n+\frac{1}{2}}\ \forall x \in [-1,1]$$

et dans ce cas

$$\sum \frac{\mathcal{P}_n^2}{\lambda_n^{2s}} \leq \sum \frac{n}{n^{4s}}$$

qui converge pour $s > \frac{1}{2}$.

Pour ces espaces particuliers nous avons les comparaisons suivantes avec les espaces de Sobolev classiques H^s

$\forall s \geq 0$

$$\mathcal{J}^s \hookrightarrow H^s([-1,1]) \hookrightarrow \mathcal{J}^{\frac{s}{2}}$$
$$\mathcal{J}^{-\frac{s}{2}} \hookrightarrow \overset{\circ}{H}{}^s([-1,1]) \hookrightarrow \mathcal{J}^{-s}$$

$\left(\overset{\circ}{H}{}^s\right.$ *étant le dual de*$\left.H^s\right)$, *où toutes les injections sont optimales (non améliorables).*

Chapitre 3

Applications

Dans ce troisième chapitre nous allons essayer de trouver un champ d'application des espaces de Sobolev associés à un problème de Sturm-Liouville, et ceci en y résolvant des équations différentielles.

3.1 Exemple introductif

Définition 3.1 : *Soit H un espace de Hilbert st soit*

$$a(u,v) : H \times H \longrightarrow \mathbf{R}$$

une forme bilinéaire on dit que

•$a(u,v)$ est continue si $\exists c$ constante telle que

$$a(u,v) \leq c\,\|u\|\,\|v\| \quad \forall u, v \in H$$

$\|\|$ désignant la norme de H

•$a(u,v)$ est coércive si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(u,v) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

si $a(.,.)$ est à valeur dans $\mathbf{C}$ la dernière expression est remplacée par

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \operatorname{Re}(a(u,v)) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

Théorème 3.1 *[20](de Lax Milgram):*
Soient H un espace de Hilbert et H' son dual, et soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue, et coércive sur H, alors

$$\forall f \in H', \ \exists! u \in H \text{ tel que } a(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H$$

$\langle .,. \rangle$ désigne le crochet de dualité entre H et H', de plus si a est symétrique $(a(u,v) = a(v,u))$ u est caractérisé par

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u\rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle \right\}$$

Exemple 6 : *On se propose de résoudre le problème*

$$\begin{cases} Tu = u^{(4)} = f \text{ sur } (a,b) \text{ fini} \\ u''(a) = u''(b) = 0 \\ u'''(a) = u'''(b) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

alors la forme linéaire qui s'impose est donnée par

$$a(u,v) = \int_a^b u''v''dx$$

A vrai dire le choix de la forme bilinéaire est donnée par $a(u,v) = (Tu,v)_{L^2}$, *mais par deux intégrations par parties et en utilisant les conditions aux limites on arrive à* $a(u,v) = \int_a^b u''v''dx$.

Si l'on se place dans $H^2((a,b))$ *on voit que la forme* $a(u,v)$ *n'y est pas coércive, pour s'en convaincre il suffit de prendre une application affine* $u = \alpha x + \beta$ *alors*

$$a(u,u) = \int_a^b (u'')^2 dx = 0$$

et

$$\|u\|_{H^2}^2 = \int_a^b u^2 dx + \int_a^b (u')^2 dx + \int_a^b (u'')^2 dx \neq 0$$

donc par la formulation variationnelle du problème (3.1) on n'arrive pas à montrer l'existence de solution dans $H^2((a,b))$; *par contre si l'on se place dans l'espace* A^1 *associé au problème*

$$\begin{cases} lu = -u'' = \lambda u \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

la forme $a(u,v) = \int_a^b u''v''dx$ *y est coércive car*

$$a(u,u) = \int_a^b (u'')^2 dx = \|u\|_{A^1}^2$$

où u'' *est à considérer au sens*

$$u = \sum a_n \phi_n \text{ alors } u'' = \sum \lambda_n a_n \phi_n$$

et par suite existence de solution dans A^1

Cet exemple montre la nuance qu'il peut y avoir espaces de Sobolev classique et espace de Sobolev asscié à un problème de Sturm-Liouville

3.2 Résolution d'un problème semi-linéaire

3.2.1 Introduction

On se propose de résoudre (par une méthode variationnelle) l'équation

$$\begin{cases} lu = g(u) \\ \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

où l est un opérateur de Sturm-Liouville, et ceci sur les espaces A^s associés au problème

$$\begin{cases} lu = \lambda u \\ \text{conditions aux limites} \end{cases}$$

Rappelons que les méthodes variationnelles reposent sur le principe qui consiste à transformer la résolution de l'équation $lu = g(u)$, en la recherche des "points" où s'annule la dérivée d'une fonctionnelle $J(u)$ (points dits critiques de $J(u)$) telle que $J'(u) = lu - g(u)$

Définition 3.2 : *Soit X un espace de Banach, et $J : X \to \mathbf{R}$ une application*

•*On dira que J admet une dérivée directionnelle s'il existe $v \in X'$ (dual de X), tel que*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{J(u+tz) - J(u)}{t} = \langle v, z \rangle = \langle J'(u), z \rangle$$

v sera dit dérivée en u dans la diréction z ou G-dérivée (G pour Gateaux)

•*J sera dite différentiable en u s'il existe $v \in X'$ tel que*

$$\forall z \in X, \ J(z) - J(u) = \langle v, z-u \rangle + o(z-u)$$

(où $o(x)$ vérifie $\frac{o(x)}{\|x\|} \to 0$), on dira aussi que J est Frechet-différentiable. Onremaquera que si J est Frechet-différentiable alors elle est aussi G-différentiable et les deux dérivées coïncident.

•*L'application J sera dite convexe -resp concave- si J -resp $(-J)$- vérifie*

$$\forall \theta \in [0,1] \ J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta) J(v) \text{ pour tout } u, v$$

et J sera dite strictement convexe -resp strictement concave- si les inégalités sont strictes.

•*Si J est G-différentiable alors J est strictement convexe ssi*

$$\forall u, v \ u \neq v \ \langle J'(u) - J'(v), u-v \rangle > 0$$

•*J est dite coércive si*

$$\lim_{\|v\| \to +\infty} J(v) = +\infty$$

•*Si J vérifie pour un certain $\alpha > 0$*

$$\langle J'(u) - J'(v), u-v \rangle \geq \alpha \|v-u\|^2$$

alors J est strictement convexe, et coércive.

•*J sera dite semi-continue inférieurement notée (s.c.i) si pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ l'ensemble*

$$[J \leq \alpha] = \{x \in X; \ J(x) \leq \alpha\}$$

est fermé. J sera dite semi-continue supérieurement notée (s.c.s) si $(-J)$ est (s.c.i)

3.2.2 Théorème de Ky Fan-Von-Neumann (min-max)

Définition 3.3 : *Soient A et B deux ensembles, et soit $L : A \times B \longrightarrow \mathbf{R}$ une application.*

Un point $(x^*, y^*) \in A \times B$ est dit point selle de L sur $A \times B$ si

$$\forall x \in A, \forall y \in B \;\; L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*)$$

Théorème 3.2 : *Soient X et Y seux espaces de Banach réfléxifs; et soient $H_1 \subset X$ et $H_2 \subset Y$, deux convexes fermés. On suppose que $L : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction convexe-concave c'est à dire*

i) $\forall x \in H_1$; $L(x, .)$ *est concave* $(s.c.s)$ *sur* H_2

ii) $\forall y \in H_2$; $L(., y)$ *est convexe* $(s.c.i)$ *sur* H_1

De plus si H_1 (ou H_2) est non borné on suppose que $\exists y_0$ (ou $\exists x_0$) tel que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} L(x, y_0) = +\infty \left(ou \lim\limits_{\|y\| \to +\infty} L(x_0, y) = -\infty \right)$

Alors L admet un point selle.

Caractérisation

On suppose que L est est concave et que $L(x, .)$ $L(., y)$ sont G-dérivables alors on a l'équivalence entre les deux propositions

i) $(x^*, y^*) \in H_1 \times H_2$ est un point selle de L sur $H_1 \times H_2$.

ii) $\begin{cases} \langle \partial_1 L(x^*, y), x - x^* \rangle \geq 0 \\ \langle \partial_2 L(x, y^*), x - x^* \rangle \leq 0 \end{cases}$ pour tout $(x, y) \in H_1 \times H_2$

3.2.3 Application

Soit à résoudre l'équation

$$lu = g(u) + h \text{ sur } (a, b) \tag{3.2}$$

associée à des conditions aux limites, où l est un opérateur de Sturm-Liouville.

Soient $\{\lambda_k\}_k$ ($\lambda_k \geq 1$) et $\{\varphi_k\}_k$ les valeurs propres et fonctions propres (orthonormales) issues de l'équation $lu = \lambda u$ associée aux mêmes conditions aux limites que celles de (3.2)

Dans (3.2) $g(u)$ désigne une fonction non-linéaire en u et qui est "compatible" (nous reviendrons plus tard sur le terme compatible), et h est une fonction de $L^2((a,b))$ (le fait de rajouter h est facultatif mais il permet par exemple de supposer que $g(0) = 0$)

De plus on supposera que $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vérifie

$$\begin{aligned} \exists k &\in \mathbf{N}, \exists \alpha, \beta \in \mathbf{R}^+ \text{ tels que } \forall s, t \in \mathbf{R},\ s \neq t \\ \lambda_k &< \alpha \leq \frac{g(s) - g(t)}{s - t} \leq \beta < \lambda_{k+1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

lorsqu'une fonction vérifie (3.3) on dit qu'elle est sous linéaire et qu'elle n'interfère pas sur le spèctre de l.

Sous ces conditions (3.2) admet une solution u dans

$$A^{\frac{1}{2}} \left(= \left\{ u \in L^2(a,b), u = \sum a_n \varphi_n ; \sum a_n^2 \lambda_n < \infty \right\} \right)$$

.En effet posons

$$J(u) = \frac{1}{2} \left(l^{\frac{1}{2}} u, l^{\frac{1}{2}} u \right) - \int_a^b G(u(x))\, dx - \int_a^b h(x) u(x) dx$$

où $G(s) = \int_a^s g(t)dt$. Par la suite $(.,.)$ désignera le produit scalaire de $L^2(a,b)$ et $(.,.)_{A^{\frac{1}{2}}}$ celui de $A^{\frac{1}{2}}$ et $\langle .,. \rangle$ un crochet de dualité. Alors pour tout $v \in A^{\frac{1}{2}}$ nous avons

$$\langle J'(u), v \rangle = \left(l^{\frac{1}{2}} u, l^{\frac{1}{2}} v \right) - \int_a^b g(u(x))\, v(x) dx - \int_a^b h(x) v(x) dx \tag{3.4}$$

(ceci étant dû à la linéarité de $l^{\frac{1}{2}}$) et par suite la recherche des solutions de (3.2) revient à trouver les points critiques de J (points qui vérifient $\langle J'(u), v\rangle = 0$ pour tout $v \in A^{\frac{1}{2}}$) reste à montrer l'existence de ceux-là

Analysons l'expression

$$\langle J'(u), v\rangle = (u, v)_{A^{\frac{1}{2}}} + (g(u), v) - (h, v)$$

pour qu'elle ait un sens il est nécessaire d'avoir $v \in L^2((a,b))$, chose faite puisque $v \in A^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^2((a,b))$, donc (h, v) a un sens , il est aussi nécessaire d'avoir $g(u) \in L^2((a,b))$, pour que $(g(u), v)$ ait un sens, or ceci est une conséquence de l'hypothèse (3.3), en effet

$$u \in A^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u \in L^2((a,b))$$

d'un autre côté

$$(3.3) \Rightarrow |g(u)| \leq \beta u + c$$

or

$$|g(u)| \leq \beta u + c \Leftrightarrow g \text{ est continue de } L^2 \text{ vers } L^2$$

Rappelons que pour qu'une application $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définisse un opérateur de superposition $g(u(x))$ continu de L^2 vers L^2 il est necessaire et suffisant (voir [2]) que soit satisfaite la condition $|g(t)| \leq c_1 \|t| + c_2$, donc

$$g : L^2 \longrightarrow L^2$$

$$u \longmapsto g(u) = g \circ u$$

est continu (à vrai dire il aurait été suffisant que g soit continu de $A^{\frac{1}{2}}$ vers L^2 ce qui donnerait la "compatibilité" imposée plus haut). En définitive cette analyse nous a permis de donner un sens à l'équation (3.4).

Posons

$$H_1 = \bigoplus_{n \le k} \mathbf{R}\varphi_n, \text{ et } H_2 = \bigoplus_{n \ge k+1} \mathbf{R}\varphi_n$$

$\mathbf{R}\varphi_n = \{c\varphi_n; c \in \mathbf{R}\}$, on notera que $A^{\frac{1}{2}} = H_1 \oplus^{\perp} H_2$ somme directe et orthogonale, et soit L l'application définie sur $H_1 \times H_2$ comme suit

$$L(v_1, v_2) = J(v_1 + v_2)$$

comme, par hypothèse

$$0 < \alpha \le \frac{g(v_1 + v_2) - g(w_1 + v_2)}{v_1 - w_1}$$

alors

$$\alpha (v_1 - w_1)^2 \le [g(v_1 + v_2) - g(w_1 + v_2)] (v_1 - w_1)$$

soit en intégrant

$$\alpha \|v_1 - w_1\|_{L^2}^2 \le ([g(v_1 + v_2) - g(w_1 + v_2)], (v_1 - w_1)) \tag{3.5}$$

d'un autre côté pour tout $z \in H_1$ nous avons

$$(lz, z) = \left(l^{\frac{1}{2}}z, l^{\frac{1}{2}}z\right) \le \lambda_k \|z\|_{L^2}^2 \tag{3.6}$$

en effet

$$\begin{aligned}
z \in H_1 &\Leftrightarrow z = \sum_{n=0}^{k} a_n\varphi_n \Rightarrow lz = \sum_{n=0}^{k} a_n\lambda_n\varphi_n \\
&\Rightarrow (lz, z) = \left(\sum_{n=0}^{k} a_n\lambda_n\varphi_n, \sum_{n=0}^{k} a_n\varphi_n\right) \\
&\Rightarrow (lz, z) = \sum_{n=0}^{k} a_n^2\lambda_n \text{ par orthogonalité des } \varphi_n \\
&\Rightarrow (lz, z) \le \lambda_k \sum_{n=0}^{k} a_n^2 \text{ car } \lambda_n \le \lambda_k \ \forall n \le k \\
&\Rightarrow (lz, z) \le \lambda_k \|z\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

donc d'après (3.5) et (3.6)

$$\begin{aligned}
& \langle \partial_1 L(v_1, v_2) - \partial_1 L(w_1, v_2), v_1 - w_1 \rangle \\
= \; & (lv_1 - g(v_1 + v_2) - h - lw_1 + g(w_1 + v_2) + h, v_1 - w_1) \\
= \; & (l(v_1 - w_1) - (g(v_1 + v_2) - g(w_1 + v_2)), v_1 - w_1) \\
\leq \; & \lambda_k \|v_1 - w_1\|_{L^2}^2 - \alpha \|v_1 - w_1\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

et par suite

$$\langle \partial_1 L(v_1, v_2) - \partial_1 L(w_1, v_2), v_1 - w_1 \rangle \leq -(\alpha - \lambda_k) \|v_1 - w_1\|_{L^2}^2$$

ce qui montre que $-L(., v_2)$ est strictement convexe et qu'elle est coércive (sur L^2), c'est à dire $-L(., v_2)$ est strictement concave et

$$\lim_{\|v_1\|_{L^2} \to +\infty} L(v_1, v_2) = -\infty \Rightarrow \lim_{\|v_1\|_{A^{\frac{1}{2}}} \to +\infty} L(v_1, v_2) = -\infty$$

car $\|v_1\|_{L^2} \leq \|v_1\|_{A^{\frac{1}{2}}}$

Par un raisonnement analogue, mais en utilisant la deuxième inégalité de (3.3) on montre que $L(v_1, .)$ est coércive, strictement convexe.

L étant continue, et en conséquence du théorème (3.2) L admet un point selle $(u_1^*, u_2^*) \in H_1 \times H_2$.

La caractérisation du point selle étant

$$\langle \partial_1 L(u_1^*, u_2), u_1 - u_1^* \rangle \geq 0 \text{ pour tout } (u_1, u_2) \in H_1 \times H_2$$

comme dans notre cas, H_1 est un espace vectoriel, on a pour tout $u_1 \in H_1$ $(u_1 + u_1^*)$ et $(-u_1 + u_1^*)$ sont dans H_1, donc en remplaçant u_1 par $(u_1 + u_1^*)$ puis par $(-u_1 + u_1^*)$, dans la dernière expression nous obtenons

$$\langle \partial_1 L(u_1^*, u_2), u_1 \rangle \geq 0 \text{ pour tout } (u_1, u_2) \in H_1 \times H_2$$

et en particulier

$$\langle \partial_1 L(u_1^*, u_2^*), u_1 \rangle = 0 \text{ pour tout } u_1 \in H_1$$

et de la même manière

$$\langle \partial_1 L(u_1^*, u_2^*), u_2 \rangle = 0 \text{ pour tout } u_2 \in H_2$$

soit que

$$\langle J'(u_1^*, u_2^*), u_2 \rangle = \langle \partial_1 L(u_1^*, u_2^*), u_2 \rangle = 0$$

ou encore

$$\langle J'(u_1^*, u_2^*), u \rangle = 0$$

$u \in A^{\frac{1}{2}}$ $u = u_1 + u_2$ quelconques, d'où l'existence d'un point critique

$$u^* = u_1^* + u_2^* \in A^{\frac{1}{2}}$$

et qui est solution de (3.2) au sens affaibli

$$\langle J'(u^*), v \rangle = 0$$

3.3 Résolution d'un système semi-linéaire

(voir [13])

3.3.1 Introduction

Les espaces A^s ne conviennent pas à la résolution de tous les systèmes différentiels, car construits à partir d'un unique opérateur; cependant ils sont bien adaptés pour la résolution de systèmes du type

$$\begin{cases} lu = f(u,v) \\ lu = g(u,v) \end{cases}$$

systèmes où apparait l'opérateur l (à l'origine des espaces A^s) dans toutes les équations.

En se basant sur le travail de Djaïro de Figueiriedo, nous allons donner une méthode pour la résolution du système particulier

$$\begin{cases} lu = f(v) \\ lv = g(u) \end{cases}$$

3.3.2 Résolution

Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} lu = f(v) \\ lu = g(u) \end{cases} \quad \text{sur } (a,b) \tag{3.7}$$

où l est un opérateur de Sturm-Liouville (on supposera pour fixer les idées que (a,b) est fini)

Le problème (3.7) sera associé à des conditions aux limites qu'on notera $(C.L)$

Soit A^s l'espace de Sobolev associé au problème

$$\begin{cases} lu = \lambda u \\ (C.L) \end{cases}$$

on se propose alors de résoudre (3.7) sur $A = A^s \times A^t$, où t et s sont tels que

$$\frac{1}{4} < s < 1 \text{ et } \frac{1}{4} < t < 1 \text{ et } s + t = 1.$$

bien que l'on soit tenté de prendre $s = \frac{1}{2}$ et $t = \frac{1}{2}$, ce n'est pas toujours l'idéal; le choix de s et t se faisant suivant les qualités de f et g.

A est muni du produit scalaire $(U,V) = (u_1, v_1)_{A^s} + (u_2, v_2)_{A^t}$; où $U = (u_1, u_2)$ et $V = (v_1, v_2)$. Pour chaque $z = (u,v) \in A^s \times A^t$; on considère la fonctionnelle

$$J(z) = \int l^s u l^t v - \int F(v) - \int G(u)$$

F et G étant définies par

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt \text{ et } G(s) = \int_0^s g(t)dt$$

et on recherche les points critiques de J soit les points (u,v) vérifiant

$$\begin{cases} \langle J_1'(z), \Psi \rangle = 0 \Leftrightarrow \int l^s \Psi l^t v = \int g(u)\Psi \\ \langle J_2'(z), \Phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \int l^s u l^t \Phi = \int f(v)\Phi \end{cases}$$

J_1' et J_2' désignant la dérivation de J par rapport àla première et deuxième variable respectivement. Du fait que $s + t = 1$ le dernier système montre que les points critiques de J sont solutions du système initial.

ANNEXE

On considère le problème

$$\begin{cases} lu = \lambda u \text{ sur } \Omega \\ \text{conditions aux limites sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où l est un opérateur aux dérivées partielles agissants sur des fonctions à N variables. Le travail fait pour le cas monovariable peut être repris pour le cas multivariables (sur $\mathbf{R}^N$) et ceci à condition que

1) Les fonctions propres associées à l'opérateur l forment une famille totale dans $L^2(\Omega)$.

2) Que l'on connaisse le comportement asymptotique des valeurs propres et des fonctions propres associées à l.

3) Que l'hypothèse du type (2.3) soit vérifiée par les fonctions propres.

Exemple 7 : *Soit le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ sur } \Omega =]0,a[\times]0,a[\ \ a \text{ fini} \\ u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = u(x,a) = 0 \end{cases}$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ \ (N = 2)$$

pour résoudre l'équation $-\Delta u = \lambda u$ *on procède par séparation de variables ie on pose*

$$u(x,y) = u_1(x)u_2(y)$$

ce qui donne

$$-u_1''(x)u_2(y) - u_1(x)u_2''(y) = \lambda u_1(x)u_2(y)$$

on divise par $u_1(x)u_2(y)$ dans les deux membres de la dernière équation soit

$$\frac{-u_1''(x)}{u_1(x)} - \frac{u_2''(y)}{u_2(y)} = \lambda$$

équation qui n'est réalisée que si

$$\frac{-u_1''(x)}{u_1(x)} = \lambda_1 \text{ et } -\frac{u_2''(y)}{u_2(y)} = \lambda_2 \text{ avec } \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda$$

donc

$$\begin{cases} -u_1''(x) = \lambda_1 u_1(x) \\ u_1(0) = u_1(a) = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -u_2''(y) = \lambda_2 u_1(y) \\ u_2(0) = u_2(a) = 0 \end{cases}$$

donc

$$\lambda_1 = \lambda_{1p} = \frac{\pi^2 p^2}{a^2} \text{ et } \lambda_2 = \lambda_{2q} = \frac{\pi^2 q^2}{a^2} \quad p, q \in \mathbf{N}^*$$

et par suite

$$\lambda = \lambda_{pq} = \left(p^2 + q^2\right) \frac{\pi^2}{a^2}$$

et

$$u_1(x) = u_{1p}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{p\pi x}{a}, \quad u_2(y) = u_{2q}(y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{q\pi y}{a}$$

soit que

$$u(x, y) = u_{p,q}(x, y) = \frac{2}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{a}$$

$\{u_{p,q}\}_{p,q}$ *est une famille totale dans* $L^2(\Omega)$.

On construit l'espace A^s *comme cela a été fait précédemment ic*

$$A^s = \left\{ u \in L^2(\Omega), \ u = \sum_{p,q} a_{p,q} u_{p,q}(x, y); \quad \sum_{p,q} a_{p,q}^2 \lambda_{pq}^{2s} < \infty \right\}$$

pour avoir l'injection $A^s \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right)$, *on reprend la même méthode utilisée pour le cas d'une variable*

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq \sum_{p,q} |a_{p,q} u_{p,q}(x, y)| \\ &\leq \left(\sum_{p,q} a_{p,q}^2 \lambda_{pq}^{2s} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p,q} \frac{|u_{p,q}(x, y)|^2}{\lambda_{pq}^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.8) \\ &\leq \|u\|_{A^s} \left(\sum_{p,q} \frac{|u_{p,q}(x, y)|^2}{\lambda_{pq}^{2s}} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

comme $u_{p,q}(x,y) \leq \frac{2}{a}$ *on a*

$$\sum_{p,q} \frac{|u_{p,q}(x,y)|^2}{\lambda_{pq}^{2s}} \leq \frac{2}{a} \sum_{p,q} \frac{1}{\left((p^2+q^2)\frac{\pi^2}{a^2}\right)^{2s}}$$

dernière série qui convergedès que $2s > 1$ *soit* $s > \frac{1}{2}$

Donc

$$A^s \hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right) \text{ dès que } s > 2\frac{1}{4}$$

résultat qui laisse envisager que la dimension N *de* $\mathbf{R}^N$ *intervient dans l'indice critique qui évolue de la manière* $s_0 = N\frac{1}{4}$.

REFERENCES

[1]ADAMS,ROBERT.A. "Sobolev spaces". Academic press. 1975

[2]APPELL,J;ZABREJKO,PETR.P. "Nonlinear superposition operators". Cambridge university press. 1989

[3]AUIGUNOV,G.A. "On the asymptotics of normalized eigenfunctions of the Sturm-Liouville operator on a finite interval". Russian.Math.Surveys. **52**. (1997). p:1283-1284.

[4]AUIGUNOV,G.A. "Acriterion for the uniform boundness of normalized eigenfunctions of the Sturm-Liouville operator with a positive weight function on a finit interval". Russian.Math.Surveys. **52** (1997). p:387-389.

[5]BREZIS,H. "Analyse fonctionnelle; théorie et application.". Masson. 1983.

[6]CARLSON,R;THREADGILL,R;SHUBIN,C "Sturm-Liouville eigenvalue problems with finitely many singularities.".J.Math.Anal.Appl. **204** (1996) p:74-101.

[7]COURANT,R;HILBERT,D. "Methods of mathematical physics.". Volume I. Interscience publishers. 1953.

[8]DAUTRAY,R;LIONS,J,L. "Analyse mathématique et calcul numérique.". Masson. 1984.

[9]DIEUDONNE,J."Eléments d'analyse.". Volume I. Gauthier-Villars. 1979.

[10]DIEUDONNE,J. "Calcul infinitésimal". Hermann. 1980

[11]DUNFORD,N;SCHWARTZ,J,T. "Linear operators.". Volume II. "Spectral theory; self-adjoint operators in Hilbert space.". Interscience publishers. 1963.

[12]FEDORIOUK,M. "Méthodes asymptotiques pour les équations différentielles ordinaires linéaires.". Mir. 1987.

[13]DE FIGUEIREDO,D. "existence of solutions for hamiltonian systems via variational methods.". Second school on non-linear functional analysis andapplications to differential equations. Triest. (21 avril-19 mai 1997)

[14]FULTON,C,T;PRUESS,S,A. "Eigenvalue and eigenfunction asymptotics for regular Sturm-Liouville problems.". J.Math.Anal.Appl. **188** (1994) p:297-340.

[15]GUILLEMOT-TEISSIER,M. "Developpement des distributions en séries de fonctions orthogonales. Séries de Legendre et de Laguerre.". Annali della scuola norm.sup. Pisa (1970) p:519-573.

[16]HARRIS,B,J. "Asymptotics of eigenvalues for regular Sturm-Liouville problems.". J.Math.Anal.Appl. (1994) p:25-36.

[17]HARRIS,B,J;RACE,D. "Asymptotics of eigenvalues for Sturm-Liouville problems with interior singularity.". J.Differential equations. **116** (1995) p:88-118.

[18]HELFFER,B. "Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptique.". S.M.F. 1984.

[19]KARAA,S. "Isoperimetrique upper bounds for eigenvalues of the Sturm-Liouville type.". C.R.Acad.Sci.Paris.Sér.I.Math. (1997). p:835-840.

[20]KAVIAN,O. "Introduction à la théorie des points critiques.". Springer Verlag. 1993.

[21]LEBEDEV,N,N. "Special functions and their applications.". Dover publications, Inc. New York, 1972.

[22]LIONS,J,L;MAGENES,E. "Problèmes aux limites non homogènes et applications.". Volume I. Dunod. 1968.

[23]NIKIFOROV,A;OUVAROV,V. "Elements de la théorie des fonctions spéciales.". Mir 1976.

[24]REINHARD,H. "Equations différentielles.". Gautier-Villars. 1982.

[25]RUDIN,W. "Functional analysis.". Mc-Graw Hill. 1973.

[26]SCHWARTZ,L. "Théorie des distributions.". Hermann. 1966.

[27]TRIEBEL,H. "Interpolation theory, function spaces, differential operators.". North Holland publiching company. 1978.

[28]VO-KHAC KHOHAN. "Distributions, analyse de Fourier, opérateurs aux dérivées partielles.". Tomes I et II. Librairie Vuibert. 1972.