Anisotropie et Singularités Non-Linéaires

MIRI Sofiane El-Hadi

Laboratoire : A.N.L.M.A
Université Abou Bakr Belkaid - Tlemcen
2ème Workshop Algéro-Français EDP et Applications

Tlemcen, 30 Avril-03 Mai 2017

Introduction

On s'interesse aux problèmes faisant intervenir l'opérateur anisotrope suivant :

$$-Lu = -\sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \right]$$

avec des conditions aux bords de type Dirichlet, dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ supposé borné régulier.

Quelques indices

On utiliseras souvent les indices

$$\frac{1}{\overline{p}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i}$$

et

$$\overline{p}^* = \frac{N\overline{p}}{N-\overline{p}},\ p_\infty = \max\{p_N, \overline{p}^*\}$$

Cadre Fonctionnel

Le cadre fonctionnel naturel associé à l'opérateur L c'est les espaces de Sobolev anisotropes suivants

$$W^{1,(p_i)}(\Omega) = \left\{ v \in W^{1,1}(\Omega) \, ; \partial_i v \in L^{p_i}(\Omega) \right\}$$

et

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) = W^{1,(p_i)}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$$

muni de la norme

$$\|v\|_{W_0^{1,(p_i)}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)} .$$

S.N. Kruzhkov, I.M. Kolodii, *On the theory of embedding of anisotropic Sobolev spaces*, Russian Math. Surveys 38 (1983), 188-189.

S. M. Nikolskii, *Imbedding theorems for functions with partial derivatives considered in various metrics*, Izd. Akad. Nauk SSSR 22 (1958), 321-336.

M. Troisi, *Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi*, Ricerche Mat. 18 (1969), 3-24.

Quelques inégalités

Théorème 1

Il existe une constante positive C, qui dépend uniquement de Ω, telle que pour chaque $v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)}^{p_N} \leq C \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{p_i}, \tag{1}$$

$$\|v\|_{L^r(\Omega)} \leq C \prod_{i=1}^{N} \|\partial_i v\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\frac{1}{N}} \quad \forall r \in [1, \overline{p}^*] \tag{2}$$

et $\forall v \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\overline{p} < N$

$$\left(\int_\Omega |v|^r\right)^{\frac{N}{\overline{p}}-1} \leq C \prod_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega |\partial_i v|^{p_i} |v|^{t_i p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}, \tag{3}$$

pour chaque r et t_j choisis de telle sorte à avoir $\begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{\gamma_i(N-1)-1+\frac{1}{p_i}}{t_i+1} \\ \sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 1. \end{cases}$

Si $\overline{p} < N$, alors

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)\, \forall r \in [1, \overline{p}^*]$$

et cette injection continue, devient en plus compacte dès que $r < \overline{p}^*$.

Si $\overline{p} < N$, alors

$$W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \, \forall r \in [1, \overline{p}^*]$$

et cette injection continue, devient en plus compacte dès que $r < \overline{p}^*$.
Nous avons aussi, pour tout $v \in W_0^{1,(p_i)}$, pour tout $r > 1$ et pour tout $i = 1, ..., N$ l'inégalité de type Poincaré suivante

$$\|v\|_{L^r(\Omega)} \leq C(|\Omega|) r \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^r(\Omega)}$$

$$\begin{cases} -Lu = f & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{4}$$

avec $f \in L^m(\Omega)$

A. Di Castro, *Elliptic problems for some anisotropic operators*, Ph.D. Thesis, University of Rome "Sapienza", 2008/2009

A. Di Castro, *Existence and regularity results for anisotropic elliptic problems*, Adv. Nonlin.Stud. 9 (2009), 367-393.

Théorème 2

i) Si $m > \frac{N}{\overline{p}}$*, alors le problème (4) possède au moins une solution faible bornée.*
ii) Si $(\overline{p}^*)' \leq m < \frac{N}{\overline{p}}$*, alors le problème (4) possède au moins une solution faible appartenant à l'espace* $L^s(\Omega)$ *où* $s = \frac{m\overline{p}^*(\overline{p}-1)}{m\overline{p}+\overline{p}^*-m\overline{p}^*}$

$$
\begin{cases} -Lu = \lambda u^{\alpha} & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \\ u \geq 0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5}
$$

Alves, Claudianor Oliveira, and Abdallah El Hamidi. "Existence of solution for a anisotropic equation with critical exponent." Differential and Integral Equations 21.1-2 (2008) : 25-40.

El-Hamidi, Abdallah and Jérôme Vétois. "Sharp Sobolev asymptotics for critical anisotropic equations." Archive for rational mechanics and analysis 192.1 (2009) : 1-36.

Figueiredo, G., Santos Junior, J. R., and Suarez, A. *Multiplicity results for an anisotropic equation with subcritical or critical growth.* Advanced Nonlinear Studies, 15(2), (2015), 377-394.

Fragalà, Ilaria, Filippo Gazzola, and Bernd Kawohl. *Existence and nonexistence results for anisotropic quasilinear elliptic equations,* Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. Vol. 21. No. 5. Elsevier Masson, (2004), 715-734.

$$
\begin{cases} -Lu \pm \sum_{i=1}^{N} |\partial_i u|^{p_i} = f & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{6}
$$

Di Castro, Agnese. "Anisotropic elliptic problems with natural growth terms." manuscripta mathematica 135.3 (2011) : 521-543.

$$u_t - Lu = f(t, x, u)\text{dans } \Omega \times (0, T) \tag{7}$$

Tersenov, Alkis S., and Aris S. Tersenov. "Existence of Lipschitz continuous solutions to the Cauchy-Dirichlet problem for anisotropic parabolic equations." Journal of Functional Analysis 272.10 (2017) : 3965-3986.

Vétois, Jérôme. "Strong maximum principles for anisotropic elliptic and parabolic equations." Adv. Nonlinear Stud 12.1 (2012) : 101-114.

Présence d'une non-linéarité singulière
Inspiré par les travaux

L. Boccardo and L. Orsina, *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations 37 (2009), 363–380.

L. M. De Cave, *Nonlinear elliptic equations with singular nonlinearities*, Asymptotic Analysis 84 (2013), 181-195.

Présence d'une non-linéarité singulière
Inspiré par les travaux

L. Boccardo and L. Orsina, *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities,* Calc. Var. Partial Differential Equations 37 (2009), 363–380.

L. M. De Cave, *Nonlinear elliptic equations with singular nonlinearities*, Asymptotic Analysis 84 (2013), 181-195.

$$\begin{cases} -Lu = \dfrac{f}{u^\gamma} & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{8}$$

Leggat, Ahmed Réda, and Miri, Sofiane El-Hadi. "Anisotropic problem with singular nonlinearity." Complex Variables and Elliptic Equations 61.4 (2016) : 496-509.

Miri, Sofiane El-Hadi. "On an anisotropic problem with singular nonlinearity having variable exponent." Ricerche di Matematica : 1-10. à paraître.

On utilisera les fonctions usuelles suivantes

$$T_n(s) = \begin{cases} n\frac{s}{|s|} & si \quad |s| > n \\ s & si \quad |s| \leq n \end{cases}$$

et

$$G_n(s) = s - T_n(s).$$

Parfois on se placera dans les espaces de Marcinkiewicz $M^m(\Omega)$ au lieu des espaces de Lebesgues $L^m(\Omega)$.

Définition 3

Soit m un réel positif. L'espace de Marcinkiewicz $M^m(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables f telles que

$$meas\{x \in \Omega, |f(x)| > k\} \leq \frac{c}{k^m}, pour\ chaque\ k > 0$$

pour une certaine constante $c > 0$. Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|^m = Inf\{c > 0, \text{tel que l}'\text{ingalit prcdente lieu}\}.$$

Si de plus Ω est de mesure finie on a, pour chaque $\varepsilon > 0$

$$L^m(\Omega) \subset M^m(\Omega) \subset L^{m-\varepsilon}(\Omega).$$

Sur la notion de solution

Définition 4

On dira que $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ est une solution d'énergie de (8) ssi

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_{\Omega} \frac{f\varphi}{u^{\gamma}} \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega),$$

et on dira que u est une solution faible de (8) ssi $\partial_i u^{p_i-1} \in L^1(\Omega)$, $\frac{f}{u^{\gamma}} \in L^1_{loc}(\Omega)$, et l'on a

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_{\Omega} \frac{f\varphi}{u^{\gamma}} \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Problèmes Approximants

On considère la suite de problèmes approximants suivants

$$\begin{cases} -Lu_n = \frac{f_n}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\gamma}} & dans\ \Omega, \\ u_n = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u_n \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{9}$$

où $f_n = T_n(f)$.

Lemme 5

La problème(9) possède une solution dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Preuve

Fixons $n \in \mathbb{N}$, et soit $v \in L_{\overline{p}^*}(\Omega)$. Considerons alors l'équation

$$-Lw = \frac{f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}}, \tag{10}$$

ce problème possède bien une solution car le second membre est dans $L^s(\Omega)$ avec $s \geq p'_\infty$
en utilisant alors w comme fonction test dans (10), on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i w|^{p_i} = \int_{\Omega} \frac{w f_n}{\left(|v| + \frac{1}{n}\right)^{\gamma}} \leq n^{\gamma+1} \int_{\Omega} |w|$$

Preuve

par l'inégalité de Sobolev (1),

$$\|w\|^{p_N}_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i w|^{p_i} ,$$

par l'inégalité de Hölder

$$\int_{\Omega} |w| \leq \left(\int_{\Omega} |w|^{\overline{p}^*} \right)^{\frac{1}{\overline{p}^*}} .$$

Preuve

Donc

$$\|w\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)}^{p_N} \leq Cn^{\gamma+1}\|w\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)},$$

et par suite

$$\|w\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} \leq C'\left(n^{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{p_N-1}} = R_N,$$

en d'autres termes, la boule de rayon R_N dans $L^{\overline{p}^*}(\Omega)$ est invariante par S, et par l'injection de Sobolev et le thèorème du point fixe de Schauder on conclut que le problème(9) a une solution dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, pour chaque n fixé.

Remarque

Il est possible d'utiliser des techniques variationnelles pour montrer l'existence de la solution, en minimisant la fonctionnelle d'énergie suivante

$$J_\lambda(u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} - \lambda \int_\Omega F(u)$$

avec

$$F(s) = \int_0^s \frac{f_n}{\left(t + \frac{1}{n}\right)^n} dt$$

Lemme 6

La suite $\{u_n\}_n$ est croissante en n.

Preuve

Rappelons que $f_n = T_n(f)$ et donc $0 \le f_n \le f_{n+1}$

$$-Lu_n = \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \le \frac{f_{n+1}}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}$$

comme

$$-Lu_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}$$

on a

$$\begin{aligned} -Lu_n + Lu_{n+1} &\le f_{n+1}\left[\frac{1}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma} - \frac{1}{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}\right] \\ &\le f_{n+1}\left[\frac{\left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma - \left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}{\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^\gamma}\right] \end{aligned}$$

Preuve

en utilisant $(u_n - u_{n+1})^+$ comme fonction test dans la dernière égalité, le membre droit donne

$$f_{n+1}\left[\frac{\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}-\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}}{\left(u_n+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}\left(u_{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma}}\right](u_n-u_{n+1})^+ \leq 0.$$

En considérant les problèmes vérifiés par u_n et u_{n+1} respectivement, il en découle que

$$\int_\Omega (-Lu_n + Lu_{n+1})\,(u_n - u_{n+1})^+ \leq 0.$$

Par suite

$$\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left(|\partial_i u_n|^{p_i-2}\,\partial_i u_n - |\partial_i u_{n+1}|^{p_i-2}\,\partial_i u_{n+1}\right)\partial_i\,(u_n-u_{n+1})^+ \leq 0.$$

Preuve

En intégrant sur le sous ensemble de Ω où $u_n \geq u_{n+1}$ et en utilisant l'inégalité algébrique suivante pour $p_i \geq 2$

$$C_0 \left|\partial_i \left(u_n - u_{n+1}\right)\right|^{p_i} \leq \left(\left|\partial_i u_n\right|^{p_i - 2} \partial_i u_n - \left|\partial_i u_{n+1}\right|^{p_i - 2} \partial_i u_{n+1}\right) \partial_i \left(u_n - u_{n+1}\right)$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\partial_i \left(u_n - u_{n+1}\right)^+\right|^{p_i} \leq 0.$$

En conclusion $u_n \leq u_{n+1}$, soit que $\{u_n\}_n$ est croissante.

Remarques

1. Il est à noter que l'unicité de la solution u_n du problème (9), peut être démontrée.

Remarques

1. Il est à noter que l'unicité de la solution u_n du problème (9), peut être démontrée.
2. Nous nous sommes limités au cas $p_i \geq 2$, même si l'on peut étendre les résultats obtenus jusque-là au cas $p_i \leq 2$, car par la suite on aura besoin d'utiliser un principe de maximum fort, qui n'existe (du moins à notre connaissance) que dans le cas $p_i \geq 2$.

Lemme 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n la solution du problème approximant (9), est telle que $u_n \in L^\infty(\Omega)$ et pour tout $K \subset\subset \Omega$, $u_n \geq C_K > 0$.

Par l'utilisation des arguments relatifs aux opérateurs de type of Leray-Lions on montre l'existence d'une solution de

$$-Lu_1 = \frac{f_1}{(u_1+1)^\gamma}$$

et donc

$$-Lu_1 \geq \frac{f_1}{(\|u_1\|_\infty + 1)^\gamma} \geq 0$$

Le principe de maximum fort, et la monotonie de $\{u_n\}_n$ donnent $u_n \geq C_K > 0$.

Le cas $\gamma = 1$

Théorème 8

Si $f \in L^1(\Omega)$ *, alors le problème (8) possède une solution* $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$*, obtenue comme le limite de* $\{u_n\}_n$ *.*

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

En utilisant u_n comme fonction test dans

$$-Lu_n = \frac{f_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)}$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u_n|^{p_i} = \int_{\Omega} \frac{f_n u_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)} \leq \int_{\Omega} f_n \leq \int_{\Omega} f.$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

Par suite $\{u_n\}_n$ est bornée dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, et converge faiblement vers u, ce qui peut être réécrit comme suit

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u_n|^{p_i-2}\partial_i u_n\partial_i\varphi=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u|^{p_i-2}\partial_i u\partial_i\varphi$$

pour chaque $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

D'un autre côté on a

$$0 \leq \left| \frac{f_n \varphi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)} \right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{c_K} f$$

Par le théorème de Lebesgue on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)} = \int_\Omega \frac{f \varphi}{u}$$

Le cas $\gamma = 1$

Théorème 9

Soit $f \in M^m(\Omega)$, *telle que* $m > \frac{N}{p}$, *alors le problème (8) possède une solution* $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

Utilisons $G_k(u_n),\ k > 1$ comme fonction test dans (9), on obtient alors

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u_n|^{p_i - 2} \partial_i u_n \partial_i G_k(u_n) = \int_{\Omega} \frac{f_n G_k(u_n)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)}$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

Sur l'ensemble $\{u_n \geq k\}$ où $G_k(u_n) \neq 0$, on a $u_n + \frac{1}{n} \geq k > 1$ et donc

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i G_k(u_n)|^{p_i} \leq \int_{\Omega} f_n G_k(u_n),$$

en particulier

$$\left(\int_{\Omega} |\partial_i G_k(u_n)|^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i N}} \leq \left(\int_{\Omega} f_n G_k(u_n) \right)^{\frac{1}{p_i N}}.$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

Par l'inégalité de Sobolev (2), avec $r = \overline{p}^*$, on obtient

$$\|G_k(u_n)\|_{L^{\overline{p}^*}(\Omega)} \leq C \prod_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega f_n G_k(u_n) \right)^{\frac{1}{p_i N}} = C \left(\int_\Omega f_n G_k(u_n) \right)^{\frac{1}{\overline{p}}} .$$

Par l'inégalité de Hölder on obtient

$$C \left(\int_\Omega f_n G_k(u_n) \right)^{\frac{1}{\overline{p}}} \leq C \left(\int_\Omega |G_k(u_n)|^{\overline{p}^*} \right)^{\frac{1}{\overline{p}^* \overline{p}}} \left(\int_\Omega |f_n|^{\overline{p}^{*\prime}} \right)^{\frac{1}{\overline{p}^{*\prime} \overline{p}}} ,$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

et donc

$$\left(\int_\Omega |G_k(u_n)|^{\overline{p}^*}\right)^{\frac{1}{\overline{p}^*}-\frac{1}{\overline{p}^*\overline{p}}} \leq C\left(\int_\Omega |f_n|^{\overline{p}^{*\prime}}\right)^{\frac{1}{\overline{p}}-\frac{1}{\overline{p}^*\overline{p}}}.$$

on a supposé que $p_i \geq 2 > 1$, ce qui donne $\overline{p} > 1$; en rappelant que

$$\overline{p} > 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{\overline{p}^*} - \frac{1}{\overline{p}^*\overline{p}} > 0,$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

alors par le fait que $f \in M^m(\Omega)$, $m > \overline{p}^{*\prime}$,

$$\int_{\{u_n > k\}} |f_n|^{\overline{p}^{*\prime}} \leq C meas\,(A_k)^{1-\frac{\overline{p}^{*\prime}}{m}} \quad \text{where } A_k = \{u_n > k\}.$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

Encore une fois par l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega |G_k(u_n)| \leq C meas\,(A_k)^{\alpha}\,,$$

avec

$$\alpha = \left(1 - \frac{\overline{p}^{*\prime}}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{\overline{p}^{*}}\right)\frac{1}{\overline{p}-1} + 1 - \frac{1}{\overline{p}^{*}}.$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

En posant

$$g(k) = \int_\Omega |G_k(u_n)|,$$

par le fait que

$$meas A_k = \int_\Omega \mathbb{1}_{\{u_n > k\}},$$

en utilisant la définition de G_k, et par une différentiation en k, la dernière inégalité devient

$$(g(k))^{\frac{1}{\alpha}} \leq -Cg'(k).$$

Donc

$$1 \leq -Cg'(k)\,(g(k))^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{-C}{1-\frac{1}{\alpha}}\left(g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)'.$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

En observant que l'hypothèse $m > \frac{N}{p}$ implique que $1 - \frac{1}{\alpha} > 0$, en intégrant la dernière inégalité on a

$$k \leq -C \left[g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} - g(0)^{1-\frac{1}{\alpha}} \right],$$

ce qui donne

$$Cg(k)^{1-\frac{1}{\alpha}} \leq -k + C \left\| u_n \right\|_{L^1(\Omega)}^{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Comme $g(k)$ est positive décroissante, la dernière inégalité assure l'existence de k_0 tel que $g(k_0) = 0$, et donc $\left\| u_n \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_{k_0}$ et par suite $u \in L^\infty(\Omega)$.

Le cas $\gamma = 1$

Théorème 10

Soit $f \in L^m(\Omega)$, tel que $m > \frac{N}{p}$, alors le problème (8) possède une solution $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Démonstration.

C'est une conséquence directe du Théorème précédent et le fait que $L^m(\Omega) \subset M^m(\Omega)$. $\square$

Le cas $\gamma = 1$

Théorème 11

Soit $f \in L^m(\Omega)$ *, tel que,* $\overline{p}^{*\prime} < m < \frac{N}{\overline{p}}$*, alors le problème (8) possède une solution* $u \in L^s(\Omega)$ *avec* $s = \frac{mN\overline{p}}{N - m\overline{p}}$.

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

L'existence de solution étant prouvée dans les théorèmes précédents, on s'attèle à étudier sa régularité. Utilisons $\psi = |T_k(u)|^{t_j p_j} T_k(u)$, avec $j = 1, 2, \ldots N$, comme fonction test dans (8) avec

$$t_j = \frac{m-1}{mp_j\gamma_j(N-1) - p_j m + 1}$$

et

$$\gamma_j = \frac{1}{N-1}\left(\frac{1}{m\overline{p}} - \frac{1}{N} + 1 - \frac{1}{mp_j}\right)$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \partial_i \left(|T_k(u)|^{t_j p_j} T_k(u) \right) = \int_{\Omega} \frac{f \, |T_k(u)|^{t_j p_j} T_k(u)}{u} \leq \int_{\Omega} f \, |T_k(u)|^{t_j p_j} .$$

d'un autre côté on a

$$C \int_{\Omega} \left| \partial_j T_k(u) \right|^{p_j} |T_k(u)|^{t_j p_j} \leq \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \partial_i \left(|T_k(u)|^{t_j p_j} T_k(u) \right) \quad \forall j = 1, 2, \ldots N.$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

Par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_\Omega f\,|T_k(u)|^{t_j p_j} \leq \left(\int_\Omega |f|^m\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{t_j p_j m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \qquad \forall j = 1, 2, \ldots N.$$

Les deux dernières inégalités donnent

$$\int_\Omega |\partial_j T_k(u)|^{p_j}\,|T_k(u)|^{t_j p_j} \leq C\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{t_j p_j m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

En prenant le poduit sur les j dans la denière inégalité on obtient

$$\prod_{j=1}^{N} \left(\int_{\Omega} |\partial_j T_k(u)|^{p_j} \, |T_k(u)|^{t_j p_j} \right)^{\frac{1}{p_j}} \leq C \prod_{j=1}^{N} \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{t_j p_j m'} \right)^{\frac{1}{p_j m'}},$$

et par (3) avec $r = s$ et $v = T_k(u)$ l'inégalité devient

$$\left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{s} \right)^{\frac{N}{\overline{p}} - 1} \leq C \prod_{j=1}^{N} \left(\int_{\Omega} |T_k(u)|^{t_j p_j m'} \right)^{\frac{1}{p_j m'}}.$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

En observant que notre choix de t_j et de γ_j vérifie bien

$$\begin{cases} s = \frac{1+t_j}{\gamma_j(N-1)-1+\frac{1}{p_j}} = t_j p_j m' = \frac{mN\overline{p}}{N-m\overline{p}} \\ \sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 1, \end{cases}$$

et par le fait que

$$\frac{N}{\overline{p}} - 1 > \frac{N}{m'\overline{p}} \text{ puisque } m < \frac{N}{\overline{p}},$$

Le cas $\gamma = 1$

Preuve

ainsi que l'hypothèse sur m on a aussi $m \geq (\overline{p}^*)'$, ce qui donne

$$\|T_k(u)\|_{L^s(\Omega)} \leq C \quad \forall k \in N,$$

par passage à la limite $k \to +\infty$, et apr utilisation du lemme de Fatou on conclut que

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \leq C$$

qui est le résultat escompté.

Le cas $\gamma < 1$

Théorème 12

Soit $f \in L^1(\Omega)$ alors il existe une solution u de (8), appartenant à $W_0^{1,(s_i)}(\Omega)$, pour tout $s_i < p_i \frac{N(\overline{p}-(1-\gamma)N)}{\overline{p}(N-(1-\gamma))}$ et appartenant à l'espace de Lebesgue correspondant $L^{\overline{s}*}(\Omega)$.

Le cas $\gamma < 1$

Preuve

Soit $f_n = T_n(f)$, et soit $u_n \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ une solution de (8). En utilisant u_n^γ comme fonction test dans (8) on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} \, u_n^{\gamma-1} = \int_\Omega \frac{f_n u_n^\gamma}{(1+u_n)^\gamma} \leq \int_\Omega f_n \leq \|f\|_{L^1} \, ,$$

ce qui peut être réécrit pour chaque $i = 1, 2, ..., N$ comme suit

$$\int_\Omega \frac{|\partial_i u_n|^{p_i}}{u_n^{1-\gamma}} \leq C,$$

et en particulier

$$\int_\Omega \frac{|\partial_i u_n|^{p_i}}{(1+u_n)^{1-\gamma}} \leq C.$$

Le cas $\gamma < 1$

Preuve

D'un autre côté on a

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} = \int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} (1+u_n)^{(\gamma-1)\frac{s_i}{p_i}} (1+u_n)^{(1-\gamma)\frac{s_i}{p_i}} .$$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} = \int_\Omega \left(|\partial_i u_n|^{p_i} (1+u_n)^{(\gamma-1)}\right)^{\frac{s_i}{p_i}} \left((1+u_n)^{(1-\gamma)\frac{s_i}{p_i-s_i}}\right)^{\frac{p_i-s_i}{p_i}} ,$$

Le cas $\gamma < 1$

Preuve

et donc

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} \leq C \int_\Omega \left((1+u_n)^{(1-\gamma)\frac{s_i}{p_i - s_i}} \right)^{\frac{p_i - s_i}{p_i}} .$$

En choisissant dans la dernière inégalité $s_i = \theta p_i$, on a

$$\left(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} \right)^{\frac{1}{Ns_i}} \leq C \int_\Omega \left((1+u_n)^{(1-\gamma)\frac{\theta}{1-\theta}} \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}\frac{1}{Ns_i}} .$$

Par l'inégalité de Sobolev (2), on conclut que

$$\left(\int_\Omega |u_n|^{\overline{s}*} \right)^{\frac{1}{\overline{s}*}} \leq C \int_\Omega \left((1+u_n)^{(1-\gamma)\frac{\theta}{1-\theta}} \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}\frac{1}{\overline{p}}} . \qquad (11)$$

Le cas $\gamma < 1$

Preuve

En utilisant l'hypthèse émise sur les s_i, an a

$$(1-\gamma)\,\frac{\theta}{1-\theta} < \frac{\overline{s}N}{N-\overline{s}} = \overline{s*},$$

ce qui nous permet d'utiliser l'inégalité de Hölder du côté droit de l'inégalité (11), ce qui nous donne

$$\left(\int_\Omega |u_n|^{\overline{s*}}\right)^{\frac{1}{\overline{s*}}} \leq C\int_\Omega \left((1+u_n)^{\overline{s*}}\right)^{\frac{1-\gamma}{\overline{p}}\,\frac{1}{\overline{s*}}}.$$

Le cas $\gamma < 1$

Preuve

Nous avons besoin de passer à la limite en n. Comme il a été prouvé que

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{s_i} \leq C,$$

donc, à une sous suite près

$$\partial_i u_n \longrightarrow \partial_i u \quad \text{weakly in } L^{s_i}(\Omega),$$

et

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{strongly in } L^{\overline{s*}}(\Omega).$$

On affirme alors que

$$\partial_i u_n \longrightarrow \partial_i u \quad \text{fortement dans } L^{r_i}(\Omega) \text{ pour chaque } r_i < s_i.$$

Le cas $\gamma < 1$

Preuve

En utilisant des arguments similaires à ceux de la page 18 dans [1] ; en effet pour chaque $\eta > 0$, on considère l'ensemble $A_\eta = \{|u_n - u_m| \leq \eta\}$ alors on a

$$\int_{A_\eta} \left(|\partial_i u_n|^{p_i-2}\, \partial_i u_n - |\partial_i u_m|^{p_i-2}\, \partial_i u_m\right) \partial_i \left(u_n - u_m\right) \leq 2\eta \left\| f \right\|.$$

Par l'inégalité algébrique (25), on a

$$\int_{A_\eta} |\partial_i \left(u_n - u_m\right)|^{p_i} \leq C\eta.$$

Le cas $\gamma < 1$

Preuve

Par l'inégalité de Hölder, on aboutit à

$$\int_\Omega |\partial_i (u_n - u_m)|^{r_i} \leq C_1 \eta^{\frac{r_i}{p_i}} + C_2 meas\left(\{|u_n - u_m| > \eta\}\right)^{1-\frac{r_i}{s_i}}.$$

Comme $u_n \longrightarrow u$ fortement dans $L^{\overline{s*}}(\Omega)$, et comme la dernière inégalité reste valable pour chaque $\eta > 0$, on conclut que la suite $\{\partial_i u_n\}_n$ est de Cauchy dans $L^{r_i}(\Omega)$ ce qui nous permet de conclure.

Remarque

On peut obtenir un résultat de régularité de manière différente en donnant des estimations sur les dérvées de première ordre des solution de la façon suivante : Dans (9) on utilise u_n^γ comme fonction test, ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u_n|^{p_i - 2} \partial_i u_n \partial_i (u_n^\gamma) \leq C.$$

Inégalité qui peut être transformée comme suit :

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \partial_i u_n^{\frac{\gamma + p_i - 1}{p_i}} \right|^{p_i} \leq C.$$

Remarque

Soit encore

$$\left|\partial_i u_n^{\frac{\gamma+p_i-1}{p_i}}\right| \in L^{p_i}(\Omega).$$

La dernière estimation ne veut pas dire que la solution u appartient à un certain espace de Sobolev anisotrope, mais donne seulement une estimation sur les dérivées de premier ordre de u, $\left|\partial_i u^{\frac{\gamma+p_i-1}{p_i}}\right| \in L^{p_i}(\Omega)$.

Le cas $\gamma > 1$

Théorème 13

Soit $f \in L^1(\Omega)$, alors il existe une solution u de (8) , appartenant à l'espace de Lebesgue $L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{N(\gamma-1+\overline{p})}{N-\overline{p}}$.

Le cas $\gamma > 1$

Preuve

Comme pour le cas $\gamma < 1$, on utilise $f_n = T_n(f)$, et soit $u_n \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ soit une solution solution de (8) , et prenons u_n^γ comme fonction test, on obtient alors pour chaque $i = 1, 2, ..., N$

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma-1} \leq C.$$

Par l'inégalité de Sobolev (3) avec les exposants

$$\begin{cases} t_i p_i = \gamma - 1 \\ r = s = \frac{N(\gamma-1+\overline{p})}{N-\overline{p}} \\ \frac{1}{r} = \frac{\gamma_i(N-1)-1+\frac{1}{p_i}}{t_i+1} \end{cases},$$

Le cas $\gamma > 1$

Preuve

ce choix rempli bien les conditions

$$\sum_{i=1}^{N} \gamma_i = 1$$

et donc

$$u_n \in L^s(\Omega)$$

et par suite

$$u \in L^s(\Omega).$$

Le cas $\gamma > 1$

Remarque

En utilisant u_n^γ comme fonction test dans (9), on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} \left(u^{\gamma-1}\right) \leq C,$$

par le principe de maximum fort

$$C(K) \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i} \leq C,$$

sur chaque compact $K \subset\subset \Omega$. On obtient ainsi la convergence faible de u_n vers u dans $W^{1,(p_i)}(\Omega_1)$, dans chaque sous ensemble ouvert $\Omega_1 \subset\subset \Omega$.

On considère à présent le problème suivant

$$\begin{cases} -Lu = \dfrac{f}{u^{\gamma(x)}} & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{12}$$

où

$$Lu = \sum_{i=1}^{N} \partial_i \left[|\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \right],$$

$\gamma(x) > 0$ est supposée être une fonction régulière, par exemple $\gamma(x) \in C(\overline{\Omega})$, et Ω comme précédemment est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On supposera sans perte de généralité que $2 \leq p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_N$ et que f est une fonction positive appartenant à un espace de Lebesgue convenable $L^m(\Omega)$.

Définition 14

On dira que $u \in W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$ est une solution au sens de l'énergie de (12) si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_{\Omega} \frac{f\varphi}{u^{\gamma(x)}} \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega),$$

et on dira que u est une solution faible de (12) si $\partial_i u^{p_i-1} \in L^1(\Omega)$, $\frac{f}{u^{\gamma(x)}} \in L^1_{loc}(\Omega)$, et on a l'égalité

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_{\Omega} \frac{f\varphi}{u^{\gamma(x)}} \qquad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

Problèmes Approximants

On considère les problème approximants suivant

$$\begin{cases} -Lu_n = \frac{f_n}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} & dans \ \Omega, \\ u_n = 0 & sur \ \partial\Omega, \\ u_n \geq 0 & dans \ \Omega, \end{cases} \tag{13}$$

avec $f_n = T_n(f)$.

Lemme 15

Le problème (13) possède une solution dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Lemme 16

La suite $\{u_n\}_n$ *est croissante par rapport à* n.

Lemme 17

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n *la solution du problème approximant (13), est telle que* $u_n \in L^\infty(\Omega)$ *et pour tout* $K \subset\subset \Omega$, $u_n \geq C_K > 0$.

Pour $\delta > 0$ fixé, soit $\Omega_\delta = \{x \in \Omega, dist(x, \partial\Omega) < \delta\}$

Théorème 18

Soit $s = \dfrac{N\overline{p}}{N(\overline{p}-1)+\overline{p}}$ *et* $f \in L^s(\Omega)$, *supposons qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $\gamma(x) \leq 1$ *dans* Ω_δ, *alors la suite* $\{u_n\}_n$ *des solutions des problèmes (13), est bornée dans* $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$.

Preuve

Posons $\omega_\delta = \Omega \setminus \overline{\Omega_\delta}$, par les résultats précédents on sait que $u_n \geq C_{\omega_\delta} > 0$. En utilisant u_n comme fonction test dans (13) on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} &= \int_\Omega \frac{f_n(x)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} u_n \\
&= \int_{\overline{\Omega_\delta}} \frac{f_n(x)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} u_n + \int_{\omega_\delta} \frac{f_n(x)}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} u_n \\
&\leq \int_{\overline{\Omega_\delta}} f(x) u_n^{1-\gamma(x)} + \int_{\omega_\delta} \frac{f(x)}{C_{\omega_\delta}^{\gamma(x)}} u_n \\
&\leq \int_{\overline{\Omega_\delta} \cap \{u_n \leq 1\}} f(x) + \int_{\overline{\Omega_\delta} \cap \{u_n \geq 1\}} f(x) u_n + \int_{\omega_\delta} \frac{f(x)}{C_{\omega_\delta}^{\gamma(x)}} u_n \\
&\leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \left(1 + \left\| C_{\omega_\delta}^{-\gamma(x)} \right\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \int_\Omega f(x) u_n
\end{aligned}$$

Preuve

Par les inégalités de Hölder et de Sobolev, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u_n|^{p_i} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + C\left(1+\left\|C_{\omega_\delta}^{-\gamma(x)}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\right)\|f\|_{L^s(\Omega)}\left[\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u_n|^{p_i}\right]^{\frac{1}{p_N}}$$

ce qui implique que

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\partial_i u_n|^{p_i} \leq C$$

où C est une constante indépendante de n.

Théorème 19

Soit $s = \dfrac{N\overline{p}}{N\left(\overline{p}-1\right)+\overline{p}}$ *et* $f \in L^{s}\left(\Omega\right)$, *supposons qu'il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $\gamma(x) \leq 1$ *dans* Ω_{δ}, *alors le problème (12) possède une solution dans* $u \in W_{0}^{1,(p_i)}\left(\Omega\right)$.

Preuve

Par la proposition précédente $\{u_n\}_n$ est bornée dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$, donc (à une sous suite près) $\{u_n\}_n$ converge faiblement vers u dans $W_0^{1,(p_i)}(\Omega)$. D'un autre côté, $\{u_n\}_n$ converge fortement dans $L^{\theta}(\Omega)$ pour $\theta < \overline{p}^*$, donc $\{u_n\}_n$ converge ver u presque partout dans Ω. On a donc pour chaque $\varphi \in C_0^1(\Omega)$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u_n|^{p_i-2} \partial_i u_n \partial_i \varphi = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u|^{p_i-2} \partial_i u \partial_i \varphi$$

Preuve

Par le fait que

$$0 \leq \left| \frac{f_n(x)\varphi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} \right| \leq \left\| \varphi C_\omega^{-\gamma(x)} \right\|_{L^\infty(\Omega)} f(x)$$

pour chaque $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, dès que $\varphi \neq 0$ et sur l'ensemble où $u_n \geq C_\omega$, ω étant le support de φ; le théorème de convergence dominée de Lebesguenous permet de conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega \frac{f_n(x)\varphi}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma(x)}} = \int_\Omega \frac{f(x)\varphi}{u^{\gamma(x)}}$$

et par conséquent, la limite u de la suite $\{u_n\}_n$ vérifie

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\partial_i u|^{p_i - 2} \partial_i u \partial_i \varphi = \int_\Omega \frac{f(x)\varphi}{u^{\gamma(x)}}.$$

Théorème 20

Supposons que pour un certain $\gamma^* > 1$ *et pour un* $\delta > 0$ *on ait* $\|\gamma\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} \leq \gamma^*$. *Pourvue que* $f \in L^s(\Omega)$ *avec* $s = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{N(\overline{p} - 1) + \overline{p}\gamma^*}$, *le problème (12) possède une solution* u *dans* $L^\alpha(\Omega)$ *avec* $\alpha = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{(N - \overline{p})}$, *appartenant à* $W^{1,(p_i)}_{loc}(\Omega)$.

Preuve

Utilisons $u_n^{\gamma^*}$ comme fonction test dans (13), nous obtenons alors pour chaque $i = 1, 2, ..., N$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma^*-1} &\leq \int_{\overline{\Omega_\delta}} f(x) u_n^{\gamma^*-\gamma(x)} + \int_{\omega_\delta} \frac{f(x)}{C_{\omega_\delta}^{\gamma(x)}} u_n^{\gamma^*} \\
&\leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \left(1 + \left\| C_{\omega_\delta}^{-\gamma(x)} \right\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \int_\Omega f(x) u_n^{\gamma^*} \\
&\leq \|f\|_{L^1(\Omega)} + \left(1 + \left\| C_{\omega_\delta}^{-\gamma(x)} \right\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \left(\int_\Omega f^s(x)\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega u_n^{\gamma^*\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

Preuve

avec $\beta = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{(N - \overline{p})\gamma^*}$, et donc

$$\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma^*-1} \leq C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^{\gamma^* \beta} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

et par suite

$$\left(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma^*-1} \right)^{\frac{1}{p_i}} \leq \left(C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^{\gamma^* \beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\frac{1}{p_i}}$$

ce qui implique que

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\int_\Omega |\partial_i u_n|^{p_i} u_n^{\gamma^*-1} \right)^{\frac{1}{p_i}} \leq \left(C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^{\gamma^* \beta} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i}} = \left(C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\frac{N}{\overline{p}}}$$

Preuve

avec le choix suivant des exposants

$$\begin{cases} t_i p_i = \gamma^* - 1 \\ r = \alpha = \dfrac{N\left(\gamma^* - 1 + \overline{p}\right)}{\left(N - \overline{p}\right)} \\ \frac{1}{r} = \frac{\gamma_i (N-1) - 1 + \frac{1}{p_i}}{t_i + 1} \end{cases}$$

L'inégalité de Sobolev (4) donne

$$\left(\int_\Omega u_n^\alpha\right)^{\frac{N}{\overline{p}} - 1} \leq \left(C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^\alpha\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{N}{\overline{p}}}$$

Preuve

et donc

$$\left(\int_\Omega u_n^\alpha\right)^{1-\frac{\overline{p}}{N}} \leq C_1 + C_2 \left(\int_\Omega u_n^\alpha\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

par le fait que

$$\frac{1}{\beta} < 1 - \frac{\overline{p}}{N}$$

on conclut que $\{u_n\}_n$ est bornée dans $L^\alpha(\Omega)$ avec $\alpha = \dfrac{N(\gamma^* - 1 + \overline{p})}{(N - \overline{p})}$ et par le théorème de convergence monotone, $\{u_n\}_n$ converge fortement vers $u \in L^\alpha(\Omega)$.

D'un autre côté, en utilisant $u_n^{\gamma^*}$ comme fonction test dans (13) on obtient

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u_n|^{p_i} \, u_n^{\gamma^*-1} \leq C$$

Par le principe de maximum fort, on a sur chaque compact $K \subset\subset \Omega$

$$C_K^{\gamma^*-1} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |\partial_i u_n| \leq C$$

on obtient ainsi la convergence faible de $\{u_n\}_n$ vers u dans $W_{loc}^{1,(p_i)}(\Omega)$. On termine la démonstration en suivant les même étapes que la proposition précédente.

Quelques perspectives

$$\begin{cases} -Lu + \dfrac{f}{u^\gamma} = g & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

Diaz, J. I., J. M. Morel, and L. Oswald. "An elliptic equation with singular nonlinearity." Communications in Partial Differential Equations 12.12 (1987) : 1333-1344.

Quelques perspectives

le problème du type

$$\begin{cases} -Lu \pm \sum_{i=1}^{N} |\partial_i u|^{p_i} = f & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{15}$$

a déjà été traité.

Quelques perspectives

le problème du type

$$\begin{cases} -Lu \pm \sum_{i=1}^{N} |\partial_i u|^{p_i} = f & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{15}$$

a déjà été traité.

$$\begin{cases} -Lu \pm |\nabla u|^{?} = f & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \\ u \geq 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{16}$$

Quelques perspectives

$$\begin{cases} u_t - Lu = f(x,u) & dans\ \Omega \times (0,T), \\ u \geq 0 & , \end{cases} \tag{17}$$

Quelques perspectives

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t - Lu = f(u,v) & dans\ \Omega \times (0,T), \\ v_t - Lv = g(u,v) & dans\ \Omega \times (0,T), \\ \quad u, v \geq 0 & , \end{array}\right. \tag{18}$$

Remplacer les p_i par $p_i(x)$

Boureanu, Maria-Magdalena, Patrizia Pucci, and Vicentiu D. Radulescu. "Multiplicity of solutions for a class of anisotropic elliptic equations with variable exponent." Complex Variables and Elliptic Equations 56.7-9 (2011) : 755-767.

V. Radulescu, D. Repovs, *Partial Differential Equations with Variable Exponents : Variational Methods and Qualitative Analysis,* CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton FL, 2015.

pour $p > 1$, l'opérateur p-laplacien est donné par

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

pour $p > 1$, l'opérateur p-laplacien est donné par

$$\Delta_p u := \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

il lui correspond le p-laplacien fractionnaire, pour $ps < N$

$$(\Delta_p)^s u(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+ps}} dy$$

pour $p > 1$, l'opérateur p-laplacien est donné par

$$\Delta_p u := \text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

il lui correspond le p-laplacien fractionnaire, pour $ps < N$

$$(\Delta_p)^s u(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+ps}} dy$$

Quel serait l'opérateur fractionnaire associé à L ?

MERCI POUR VOTRE ATTENTION