Démonstration de la célèbre formule du binôme de Newton

Objectif : montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k}$

Notations : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k}$ sera noté HR_n (hypothèse de récurrence)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$\rightarrow\ n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} C_0^k\, a^k\, b^{0-k} = C_0^0\, a^0\, b^0 = 1 \quad \text{et} \quad (a+b)^0 = 1 \quad \text{d'où} \quad HR_0$$

$\rightarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}$, n fixé.

Supposons que : HR_n est vraie

Montrons que… : HR_{n+1} est vraie $\left\{ HR_{n+1} \xrightarrow{\textit{correspond à}} (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k\, a^k\, b^{(n+1)-k} \right\}$

On remarque que : $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n$

D'une part : $b(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{(n+1)-k}$ (1)

D'autre part : $a(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{k+1}\, b^{n-k}$ et on fait le changement de variable : $l = k+1$

ce qui donne : $a(a+b)^n = \sum_{l=1}^{n+1} C_n^{l-1}\, a^l\, b^{(n+1)-l}$

l étant une variable muette, on peut très bien remettre la lettre k en variable

c'est-à-dire : $a(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}\, a^k\, b^{(n+1)-k}$ (2)

Par (1) et (2), on obtient :

$$(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}\, a^k\, b^{(n+1)-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{(n+1)-k}$$

Enlevons le terme $k = n+1$ de la première somme et le terme $k = 0$ de la deuxième somme :

$$(a+b)^{n+1} = C_n^n\, a^{n+1}\, b^0 + C_n^0\, a^0\, b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1}\, a^k\, b^{(n+1)-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{(n+1)-k}$$

Les deux premiers termes valent respectivement a^{n+1} et b^{n+1}, et on peut désormais réunir les deux sommes :

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[C_n^{k-1} + C_n^k\right] a^k\, b^{(n+1)-k}$$

Pour simplifier ce qu'il y a entre crochets, on utilise la formule de Pascal : $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

Ici, notre objectif est d'obtenir l'expression HR_{n+1}. Seules les bornes de la somme ainsi que les deux termes a^{n+1} et b^{n+1} posent problème ici…

On remarque alors astucieusement que l'on peut écrire :

$$a^{n+1} = C_{n+1}^{n+1}\, a^{n+1}\, b^{(n+1)-(n+1)} \quad \text{et} \quad b^{n+1} = C_{n+1}^0\, a^0\, b^{(n+1)-0}$$

ce qui nous permet de rajouter les termes correspondant aux bornes $k = 0$ et $k = n+1$, super !

D'où :

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k\, a^k\, b^{(n+1)-k} \qquad (\text{ ce n'est autre que } HR_{n+1}\ )$$

Conclusion :

HR_0 est vraie

pour un n fixé et quelconque, on a montré : $HR_n \Rightarrow HR_{n+1}$

Par le principe de récurrence, on peut donc affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k} \qquad (\text{binôme de Newton})$$

1. Si n est impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

2. Prenons n un entier impair. n s'écrit donc $2l + 1$ où l est un entier. Si l est pair, $l = 2k$ et donc $n = 4k + 1$. Si l est impair, $l = 2k + 1$ est donc $n = 4k + 3$. Dans tous les cas, on a donc $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$. On passe au carré :

$$n^2 - 1 = (4k + r)^2 - 1 = 16k^2 + 8kr + r^2 - 1 = 8(2k^2kr) + r^2 - 1.$$

   Or, si $r = 1$, $r^2 - 1 = 0$ et $n^2 - 1$ est divisible par 8. Si $r = 3$, $r^2 - 1 = 8$ et $n^2 - 1$ est aussi divisible par 8 !