Exercice 1

On considère les applications f et g définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

1. Les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont données par

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(g(x)) = f(x, x^2) = x^3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto g(f(x,y)) = g(xy) = (xy, x^2y^2) \end{aligned}$$

2. (a) L'application f est-elle injective ? En d'autres termes, est-il possible de retrouver un couple (x, y) à partir de la donnée de son image par f, à savoir le produit xy ? La réponse est évidemment non, mais pour préciser cela il convient de fournir un exemple. On peut prendre celui-ci :

$$f(1,1) = f(2,1/2) = 1$$

ce qui montre que f n'est pas injective.

(b) L'application f est-elle surjective ? Autrement dit, est-il vrai que tout élément $t \in \mathbb{R}$ est l'image par f d'un certain couple ? Pour répondre positivement à cette question il suffit de remarquer que

$$f(1,t) = t$$

donc f est surjective.

(c) L'application g est-elle injective ? Oui, car la donnée du couple (x, x^2) permet de retrouver x. Pour répondre à la question en se servant de la définition, on se donne deux réels x et x' tels que $g(x) = g(x')$, c'est-à-dire tels que

$$(x, x^2) = (x', x'^2)$$

Alors $x = x'$ par identification. Ainsi la relation $g(x) = g(x')$ implique que $x = x'$, ce qui est la définition de l'injectivité de g.

(d) L'application g est-elle surjective ? Non, car $(1, 0)$ n'admet pas d'antécédent par g : en effet, si c'était le cas, alors on aurait trouvé un réel x tel que $(x, x^2) = (1, 0)$, c'est-à-dire tel que $x = 1$ et $x^2 = 0$, ce qui est impossible.

(e) Grâce à l'analyse réelle (théorème de la bijection), on voit que $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, en particulier elle est injective et surjective.

(f) Comme f n'est pas injective, $g \circ f$ n'est pas injective. En effet, il suffit de récupérer le même exemple que pour f :

$$g(f(1,1)) = g(f(2,1/2)) = (1,1)$$

(g) Comme g n'est pas surjective, $g \circ f$ n'est pas surjective. En effet, $(1, 0)$ n'admet pas d'antécédent par g, donc n'admet pas non plus d'antécédent par $g \circ f$.