

Devoir Analyse & Algèbre

Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0 \quad (E_n)$$

1. Montrer que (E_n) possède une solution unique qu'on notera α_n .
2. Montrer que $\alpha_n \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$, et que la suite $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

Exercice 2: Par un raisonnement par l'absurde (et par une approche algébrique), montrer que

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

est irrationnel.