Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Productique

Année 2013-2014
1ère Année
Outils Mathématiques

Rattrapage

Exercice 1 : *(07 points)*

Soit $n \in \mathbb{N}, n > 2$ *, résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation suivante :*

$$(z-1)^n = (z+1)^n$$

Exercice 2 : *(06 points)*

Calculer ce qui suit :

$$I = \int \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\, dx$$

Exercice 3 : *(07 points)*

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$2y(y')^2 - y^2(y'' + y') + y^3 = 0$$

— Outils Mathématiques —

— Rattrapage —

— Corrigé —

Exercice 1 : $n \in \mathbb{N}$; $n > 2$

$$(z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \frac{(z-1)^n}{(z+1)^n} = 1$$

(on observera que $z = -1$ n'est pas solution on peut donc diviser par $z+1$)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1 \quad \text{(racine nième de 1)}$$

1pt

$$\Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad k = 0,1,2,\dots,n-1$$

1pt

$$\Leftrightarrow (z-1) = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z+1) \quad k = 0,1,2,\dots n-1$$

$$\Leftrightarrow z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = 1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad k = 0,1,2,\dots n-1.$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{2ik\pi/n}} \quad k = 1,2,\dots,n-1$$

2pts

(pour $k = 0$; $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 1$ et $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$ donc on enlève $k = 0$)

On observe aussi que $z = 1$ n'est pas solution de $(z-1)^n = (z+1)^n$) 1pt

l'ensemble des solutions est donné par $S = \left\{ \frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}},\ k = 1,2,3,\dots(n-1) \right\}$

2pts

Exercice 2 :

$$I = \int \frac{2x-3}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \int \frac{2x-4+1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = \int \frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$$

1pt

$$= -\int \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-4+4x-x^2}}\,dx = -\int (4-2x)(4x-x^2)^{-1/2}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}\,dx$$

1pt

$$= -2\sqrt{4x-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}\,dx \quad \left\langle \begin{array}{l} u = \frac{x-2}{2} \\ du = \frac{1}{2}dx \end{array} \right.$$

2pts

$$I = -2\sqrt{4x-x^2} + \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\boxed{I = -2\sqrt{4x-x^2} + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C \quad C\in\mathbb{R}}$$ 2pts

Exercice 3 :

$$2y(y')^2 - y^2(y''+y') + y^3 = 0$$

$y=0$ est une solution ; pour $y\neq 0$ posons $u=\frac{1}{y}$ ie $y=\frac{1}{u}$.

$$y=\frac{1}{u} \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u^2} \Rightarrow y'' = \frac{-u''u^2 + 2u'^2u}{u^4}$$ 1pt

On remplace dans l'équation

$$2\cdot\frac{1}{u}\left(-\frac{u'}{u^2}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\left(\frac{-u''u^2+2u'^2u}{u^4} + \frac{-u'}{u^2}\right) + \frac{1}{u^3} = 0.$$

Multiplions les deux membres de la dernière équation par u^4, on obtient

$$2\frac{u'^2}{u} + u'' - 2\frac{u'^2}{u} + u' + u = 0$$ 1pt

Ce qui donne l'équation linéaire sans second membre

$$u'' + u' + u = 0$$

Eq caractéristique : $r^2+r+1=0$; $\Delta = -3 = 3i^2$; $r_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 1pt

$r_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$u = \left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-\frac{1}{2}x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$ 2pts

(C_1 et C_2 ne s'annulant pas en même temps)

$$y=\frac{1}{u} \Rightarrow \boxed{y = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x}}$$ 2pts