Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2022-2023
Master I
Probabilités-Statistiques

Contrôle

Exercice1 : 08pts

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 3 \\ \dfrac{4}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^5 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

où α est un paramètre réel strictement positif.

1. *Pour quelle(s) valeur(s) de α, f est-elle la densité de probabilité (d.d.p) d'une variable aléatoire X ?*
2. *Calculer alors E(X), l'espérance de X.*
3. *Calculer alors V(X), la variance de X.*

Exercice 2 : 12 pts

I. Dans un pays donné la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 165 centimètres, et d'écart-type 6 centimètres.

1. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 centimètres.

2. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 150 et 157 centimètres.

3. Donner la taille maximale des 15% des femmes les plus petites.

II. Dans ce même pays, on considère maintenant la population totale (hommes et femmes), pour les femmes on conserve les mêmes données que celles de la partie I, donc la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 165 centimètres, et d'écart-type 6 centimètres, et la taille des hommes notée Y suit une loi normale d'espérance 174 centimètres et d'écart-type 8 centimètres. Les femmes représentent 51.3% de la population totale (par conséquent les hommes représentent 48.7% de la population totale).

1. On choisit une personne au hasard dans la population totale, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 cm.

2. Quelle est la probabilité qu'une personne mesurant plus de 170 cm soit une femme ?

Corrigé test.

Exercice 1 : $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<3\\ \frac{4}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^5 & \text{si } x\geq 3.\end{cases}$ $\alpha>0$

1/ $f\geq 0$ (car $\alpha>0$) il suffit de vérifier $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_3^{+\infty}\frac{4}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^5 dx=\frac{4}{\alpha}\cdot\alpha^5\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^5}dx=4\alpha^4\int_3^{+\infty}x^{-5}dx=4\alpha^4\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_3^{+\infty}$$

$$=4\alpha^4\frac{3^{-4}}{4}=\frac{\alpha^4}{3^4}=1\Rightarrow\boxed{\alpha=3}$$ 2,5 pts

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<3\\ \frac{4}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^5 & \text{si } x\geq 3.\end{cases}$$

2/ $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\,dx=\int_3^{+\infty}x\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^5dx=4\,3^4\int_3^{+\infty}x^{-4}dx=4\,3^4\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_3^{+\infty}$$

$$\boxed{E(X)=4}$$ 2,5 pts

3/ $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ $\quad(E(X)=4\Rightarrow(E(X))^2=16)$

$$E(X^2)=\int_3^{+\infty}x^2\frac{4}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^5dx=4\times3^4\int_3^{+\infty}x^{-3}dx=4\times3^4\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_3^{+\infty}$$

$$=4\times3^4\times\frac{3^{-2}}{2}=2\times3^2=18.$$

$V(X)=18-16=2$

$$\boxed{V(X)=2}$$ 3pts

Exercice 2 : I. X suit une loi $N(165, 6)$.

1/ $P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P\left(\frac{X-165}{6} \leq \frac{170-165}{6}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{X-165}{6} \leq 0,83\right)$

$= 1 - 0,7967 \longrightarrow$ de la table $N(0,1)$

$= 0,2$ 2pts

20% des femmes mesurent plus de 170 Cm.

2. $P(150 \leq X \leq 157) = P\left(\frac{150-165}{6} \leq \frac{X-165}{6} \leq \frac{157-165}{6}\right)$

$= P\left(-2,5 \leq \frac{X-165}{6} \leq -1,33\right)$

$= F(-1,33) - F(-2,5)$ (F fdr de $N(0,1)$)

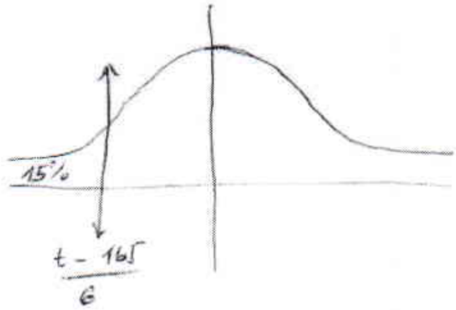
$= F(2,5) - F(1,33)$

$= 0,9938 - 0,9082$ (de la table $N(0,1)$)

$= 0,0856$ 2pts

3. On cherche la taille t, telle que $P(X \leq t) = 15\% = 0,15$.

Donc $P\left(\frac{X-165}{6} \leq \frac{t-165}{6}\right) = 0,15$



$\frac{t-165}{6}$ est nécessairement négatif

car $0,15 \leq 0,5$

Donc $1 - P\left(\frac{X-165}{6} \leq \frac{165-t}{6}\right) = 0,15$

par suite $P\left(\frac{X-165}{6} \leq \frac{165-t}{6}\right) = 1 - 0,15 = 0,85$

On trouve de la table $N(0,1)$ de façon inverse que

$\frac{165-t}{6} = 1,04 \Longrightarrow t = 165 - 1,04 \times 6$

$\Longrightarrow t = 158,76 \longrightarrow t \simeq 159$ cm.

Donc les 15% des femmes les plus petites ont une taille maximale de 159 cm. 2pts

II. X suit une loi $N(165, 6)$

Y suit une loi $N(174, 8)$.

On note les événements :

A : la taille de la personne dépasse 170 cm.

F : la personne est une femme.

H : la personne est une Homme.) partition de la population totale.

$F \cup H = \Omega$, $F \cap H = \phi$.

1. On cherche $P(A)$

$P(A) = P(A/F).P(F) + P(A/H).P(H)$ (probabilité totale).

$= P(X > 170) \cdot 0{,}513 + P(Y > 170) \cdot 0{,}487$.

1ère question $\rightarrow$ 0,2 "

$P(Y > 170) = 1 - P(Y \leq 170) = 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq \frac{170 - 174}{8}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq -0{,}5\right)$

$= P\left(\frac{Y-174}{8} \leq 0{,}5\right)$

$= 0{,}6915 \leftarrow$ de la table $N(0,1)$

$P(A) = 0{,}2 \times 0{,}513 + 0{,}6915 \times 0{,}487 = 0{,}1026 + 0{,}3368 = 0{,}4394$ 3pts

2.

On cherche $P(F/A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}513 P(X > 170)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \times 0{,}513}{0{,}4394}$

$P(F/A) = 0{,}4552 \times 0{,}513$

$P(F/A) = 0{,}2335$ 3pts

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2022-2023
Master I
Probabilités-Statistiques

Contrôle

Exercice1 : 08 pts

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 4 \\ \dfrac{5}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^6 & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

où α est un paramètre réel strictement positif.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de α, f est-elle la densité de probabilité (d.d.p) d'une variable aléatoire X ?
2. Calculer alors E(X) , l'espérance de X.
3. Calculer alors V(X) , la variance de X.

Exercice 2 : 12 pts

I. Dans un pays donné la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 155 centimètres, et d'écart-type 7 centimètres.

1. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 centimètres.

2. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 150 et 157 centimètres.

3. Donner la taille maximale des 15% des femmes les plus petites.

II. Dans ce même pays, on considère maintenant la population totale (hommes et femmes), pour les femmes on conserve les mêmes données que celles de la partie I, donc la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 155 centimètres, et d'écart-type 7 centimètres, et la taille des hommes notée Y suit une loi normale d'espérance 174 centimètres et d'écart-type 8 centimètres. Les femmes représentent 51.3% de la population totale (par conséquent les hommes représentent 48.7% de la population totale).

1. On choisit une personne au hasard dans la population totale, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 cm.

2. Quelle est la probabilité qu'une personne mesurant plus de 170 cm soit une femme ?

Corrigé test.

Exercice 1 :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<4\\ \frac{5}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^6 & \text{si } x\geq 4\end{cases} \qquad \underline{\alpha>0}$$

1/ $f\geq 0$ (car $\alpha>0$) il suffit de vérifier $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_4^{+\infty}\frac{5}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^6 dx=\frac{5}{\alpha}\cdot\alpha^6\int_4^{+\infty}\frac{1}{x^6}dx=5\alpha^5\int_4^{+\infty}x^{-6}dx=5\alpha^5\left[\frac{x^{-5}}{-5}\right]_4^{+\infty}$$

$$=5\alpha^5\frac{4^{-5}}{5}=\frac{\alpha^5}{4^5}=1\Longrightarrow\boxed{\alpha=4}$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<4\\ \frac{5}{4}\left(\frac{4}{x}\right)^6 & \text{si } x\geq 4\end{cases}$$

2,5 pts

2/ $$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\,dx=\int_4^{+\infty}x\cdot\frac{5}{4}\left(\frac{4}{x}\right)^6dx=5\times4^5\int_4^{+\infty}x^{-5}dx=5\times4^5\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_4^{+\infty}$$

$$\boxed{E(x)=5}$$

2,5 pts

3/ $$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2 \qquad E(x)=5\Rightarrow(E(x))^2=25.$$

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx=\int_4^{+\infty}x^2\frac{5}{4}\left(\frac{4}{x}\right)^6dx=5\times4^5\int_4^{+\infty}x^{-4}dx=5\times4^5\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_4^{+\infty}$$

$$=\frac{5\times4^2}{3}=\frac{80}{3}.$$

$$V(x)=\frac{80}{3}-25=\frac{80}{3}-\frac{75}{3}=\frac{5}{3}.$$

$$\boxed{V(x)=\frac{5}{3}}$$

3pts

Ex2 : I. X suit une loi $\mathcal{N}(155, 7)$.

1/ $P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P\left(\frac{X-155}{7} \leq \frac{170-155}{7}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{X-155}{7} \leq 2{,}14\right)$

$= 1 - 0{,}9838 \longrightarrow$ de la table $\mathcal{N}(0,1)$

$= 0{,}0162$ 2 pts

2/ $P(150 \leq X \leq 157) = P\left(\frac{150-155}{7} \leq \frac{X-155}{7} \leq \frac{157-155}{7}\right)$

$= P\left(-0{,}71 \leq \frac{X-155}{7} \leq 0{,}29\right)$

$= F(0{,}29) - F(-0{,}71)$ (F fdr de $\mathcal{N}(0,1)$)

$= F(0{,}29) - (1 - F(0{,}71))$

$= F(0{,}71) + F(0{,}29) - 1$.

$= 0{,}7611 + 0{,}6141 - 1 \longrightarrow$ (de la table $\mathcal{N}(0,1)$)

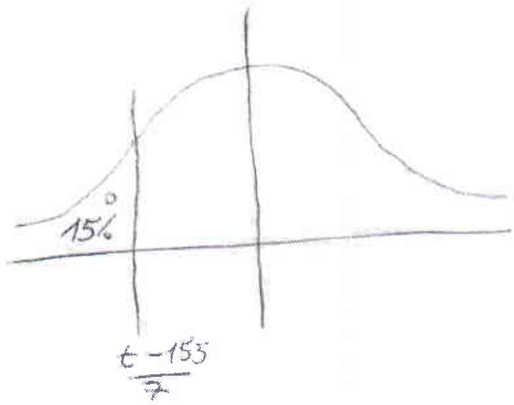
$= 0{,}3752$. 2pts

3/ On cherche la taille t telle que $P(X \leq t) = 15\% = 0{,}15$

Donc $P\left(\frac{X-155}{7} \leq \frac{t-155}{7}\right) = 0{,}15$

$\frac{t-155}{7}$ est nécessairement négatif

Car $0{,}15 \leq 0{,}5$



Donc $1 - P\left(\frac{X-155}{7} \leq \frac{155-t}{7}\right) = 0{,}15$

Par suite $P\left(\frac{X-155}{7} \leq \frac{155-t}{7}\right) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

On trouve de la table de $\mathcal{N}(0,1)$ de façon inverse que,

$\frac{155-t}{7} = 1{,}04 \Rightarrow t = 155 - (7 \times 1{,}04)$

$\Rightarrow t = 147{,}72 \Rightarrow t \simeq 148\,cm$ 2 pts

Donc les 15% des femmes les plus petites ont une taille maximale de 148 cm

II. X suit une loi $N(155,7)$
Y suit une loi $N(174,8)$

on note les événements :

A : la taille de la personne dépasse 170 cm

F : la personne est une femme

H : la personne est un homme

partition de la population totale $F \cup H = \Omega$ $F \cap H = \phi$.

1. On cherche $P(A)$

$$P(A) = P(A/F) . P(F) + P(A/H) . P(H)$$ (probabilités totales)

$$= P(X > 170) \, 0{,}513 + P(Y > 170) \, 0.487$$

1ère question

$$P(Y>170) = 1 - P(Y \leq 170) = 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq \frac{170-174}{8}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq -0{,}5\right)$$

$$= P\left(\frac{Y-174}{8} \leq 0{,}5\right)$$

$$= 0{,}6915$$ de la table $N(0,1)$

$$P(A) = 0{,}0162 \times 0{,}513 + 0{,}6915 \times 0{,}487 = 0{,}008 + 0{,}3368 = 0{,}3451.$$ 3 pts

2. On cherche $P(F/A) = \dfrac{P(F \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/F) . P(F)}{P(A)}$

$$= \frac{P(X > 170) . 0{,}513}{0{,}3451} = \frac{0{,}0162 \times 0{,}513}{0{,}3451}$$

$$= \frac{0{,}008}{0{,}3451}$$

$P(F/A) = 0{,}023.$ 3pts

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2022-2023
Master I
Probabilités-Statistiques

Contrôle

Exercice1 : 08 pts

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\, x < 5 \\ \dfrac{3}{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^4 & si\, x \geq 5 \end{cases}$$

où α est un paramètre réel strictement positif.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de α, f est-elle la densité de probabilité (d.d.p) d'une variable aléatoire X ?
2. Calculer alors E(X) , l'espérance de X.
3. Calculer alors V(X) , la variance de X.

Exercice 2 : 12 pts

I. Dans un pays donné la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 160 centimètres, et d'écart-type 5 centimètres.

1. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 centimètres.
2. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 150 et 157 centimètres.
3. Donner la taille maximale des 15% des femmes les plus petites.

II. Dans ce même pays, on considère maintenant la population totale (hommes et femmes), pour les femmes on conserve les mêmes données que celles de la partie I, donc la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 160 centimètres, et d'écart-type 5 centimètres, et la taille des hommes notée Y suit une loi normale d'espérance 174 centimètres et d'écart-type 8 centimètres. Les femmes représentent 51.3% de la population totale (par conséquent les hommes représentent 48.7% de la population totale).

1. On choisit une personne au hasard dans la population totale, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 cm.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne mesurant plus de 170 cm soit une femme ?

M1. GI

Probabilités Statistiques

Corrigé test

2022 - 2023

Exercice 1

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 5 \\ \frac{3}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \qquad \alpha > 0$$

1/ $f \geq 0$ (car $\alpha > 0$) il suffit de vérifier $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_5^{+\infty} \frac{3}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^4 dx = \frac{3}{\alpha}\alpha^4 \int_5^{+\infty} \frac{1}{x^4}dx = 3\alpha^3 \int_5^{+\infty} x^{-4}dx = 3\alpha^3 \left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_5^{+\infty}$$

$$= 3\alpha^3 \frac{5^{-3}}{3} = \frac{\alpha^3}{5^3} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 5}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 5 \\ \frac{3}{5}\left(\frac{5}{x}\right)^4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

2,5 pts

2/ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_5^{+\infty} x \frac{3}{5}\left(\frac{5}{x}\right)^4 dx = 3\times 5^3 \int_5^{+\infty} x^{-3} dx = 3\times 5^3 \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_5^{+\infty}$

$$\boxed{E(X) = \frac{15}{2}}$$

2,5 pts

3/ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ $\qquad E(X) = \frac{15}{2} \Rightarrow E(X)^2 = \frac{225}{4}$.

$$E(X^2) = \int_5^{+\infty} x^2 \frac{3}{5}\left(\frac{5}{x}\right)^4 dx = 3\times 5^3 \int_5^{+\infty} x^{-2} dx = 3\times 5^3 \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_5^{+\infty}$$

$$= 3\times 5^2 = 75.$$

$$V(X) = 75 - \frac{225}{4} = \frac{300}{4} - \frac{225}{4} = \frac{75}{4}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{75}{4}}$$

3 pts

Exercice 2 : I. X suit une loi $N(160, 5)$

1/ $P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{170-160}{5}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq 2\right)$

$= 1 - 0,9772$ ← de la table $N(0,1)$.

$= 0,022$ 2 pts

2. $P(150 \leq X \leq 157) = P\left(\frac{150-160}{5} \leq \frac{X-160}{5} \leq \frac{157-160}{5}\right)$

$= P\left(-2 \leq \frac{X-160}{5} \leq -0,6\right)$

$= F(-0,6) - F(-2)$ (F fdr de $N(0,1)$)

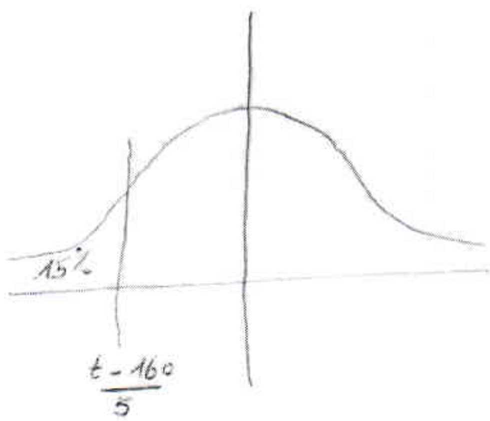
$= F(2) - F(0,6)$

$= 0,9772 - 0,7257$ (de la table $N(0,1)$)

$= 0,2515$ 2 pts

3. On cherche la taille t telle que $P(X \leq t) = 15\% = 0,15$

Donc $P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{t-160}{5}\right) = 0,15$



$\frac{t-160}{5}$ est nécessairement négatif

Car $0,15 \leq 0,5$

Donc $1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{160-t}{5}\right) = 0,15$

par suite $P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{160-t}{5}\right) = 1 - 0,15 = 0,85$

On trouve de la table $N(0,1)$ de façon inverse que :

$\frac{160-t}{5} = 1,04 \Rightarrow t = 160 - 1,04 \times 5$

$\Rightarrow t = 154,8 \Rightarrow t \simeq 155$ cm 2 pts

Donc les 15 % des femmes les plus petites ont une taille maximale de 155 cm

II. X suit une loi $N(160, 5)$

Y suit une loi $N(174, 8)$

On note les événements

A : la taille de la personne dépasse 170 cm

F : la personne est une femme

H : la personne est un homme

partition de la population totale $F \cup H = \Omega$, $F \cap H = \phi$

1. On cherche $P(A)$.

$$P(A) = P(A/F) . P(F) + P(A/H) . P(H).$$
$$= P(X > 170) . 0,513 + P(Y > 170) . 0,487$$

1ère question

$$P(Y > 170) = 1 - P(Y \leq 170) = 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq \frac{170-174}{8}\right)$$
$$= 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq -0,5\right)$$
$$= P\left(\frac{Y-174}{8} \leq 0,5\right)$$
$$= 0,6915 \leftarrow \text{de la table } N(0,1)$$

$$P(A) = 0,022 \times 0,513 + 0,6915 \times 0,487 = 0,0113 + 0,3368 = 0,3480$$ 3 pts

2. On cherche $P(F/A) = \dfrac{P(F \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/F) . P(F)}{P(A)} = \dfrac{P(X > 170) \times 0,513}{0,348}$

$$= \frac{0,022 \times 0,513}{0,348}$$
$$= \frac{0,0113}{0,348}$$
$$= 0,032$$ 3 pts