Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2022-2023
1ère Année
MATH1

Contrôle

***Exercice1 :** (12 pts)*

I. Soit l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2 + 2x + 1$$

1. *f est-elle injective ?*

2. *f est-elle surjective ?*

II. Soit l'application

$$g : A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto g(x) = x^2 + 2x + 1$$

1. *Trouver les intervalles A et B les plus grands possibles pour que g soit bijective.*

2. *Donner alors l'expression de* $g^{-1}(x)$.

***Exercice2 :** (8 pts)*

Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

Corrigé Contrôle.

Exercice 1 : I. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = x^2 + 2x + 1$.

1/ Injective. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 + 1 = x_2^2 + 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2 = 0$

$\Rightarrow (x_1^2 - x_2^2) + 2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)\left[(x_1 + x_2) + 2\right] = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2 - 2$.

Prenons par exemple $x_2 = 0$ et $x_1 = -2$ on obtient

$f(x_1) = f(-2) = 4 - 4 + 1 = 1$ et $f(x_2) = f(0) = 0^2 + 2\times 0 + 1 = 1$.

ainsi $f(-2) = f(0)$ mais $0 \neq -2$.

f n'est pas injective.

2pts

2- Surjective : Soit $y \in \mathbb{R}$ il faut résoudre $y = f(x)$

1ère méthode $y = f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ Si $y < 0$ pas de solution

$y = -2$ par exemple $-2 = f(x) \Rightarrow -2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ pas de solution

Donc f n'est pas surjective.

2ème méthode $y = f(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - y = 0$.

$\Delta = 4 - 4(1 - y) = 4y$ Si $y \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq 0$

Si $y < 0 \Rightarrow \Delta < 0$ pas de solution

$y = -2$ par exemple $-2 = f(x) \Rightarrow -2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ pas de solution

Donc f n'est pas surjective.

2pts

II. 1. $$g : A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto g(x) = x^2+2x+1.$$

D'après la première partie pour que g soit surjective il est nécessaire de prendre $B = [0, +\infty[$. 2pts

Pour A nous avons deux choix possibles en effet : Pour $y \geq 0$

$$y = x^2+2x+1 \iff y = (x+1)^2 \Rightarrow x+1 = \pm\sqrt{y} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{y}$$

Si on choisit $x = -1-\sqrt{y} \Rightarrow x \leq -1$. $(y \geq 0)$.

si on choisit $x = -1+\sqrt{y} \Rightarrow x \geq -1$.

Donc $A =]-\infty, -1]$ 2pts ou $A = [-1, +\infty[$ 2pts

2. Si : $$g :]-\infty, -1] \longrightarrow [0, +\infty[$$
$$x \longmapsto g(x) = x^2+2x+1.$$

alors $$g^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow]-\infty, -1]$$
$$x \longmapsto g^{-1}(x) = -1-\sqrt{x}.$$ 1pt

Si $$g : [-1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$
$$x \longmapsto g(x) = x^2+2x+1$$

alors $$g^{-1} : [0, +\infty[\longrightarrow [-1, +\infty[$$
$$x \longmapsto g^{-1}(x) = -1+\sqrt{x}.$$ 1pt

Exercice 2 : Par récurrence montrons que :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

1- Pour $n=0$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^1\right] \Leftrightarrow 1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = 1$ (1pt)

relation vérifiée pour $n=0$.

2- Supposons que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$ (1pt) (Hypothèse de Récurrence HR)

3- Il faut montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}\right]$ (1pt)

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \underset{HR}{=} \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] + \frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left[1-\frac{2}{3}\right]\right]$$

$$= 3/2\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= 3/2\left[1-\left(1/3\right)^{n+2}\right] \quad \text{Cqfd.}$$

(5pts)

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 3/2\left[1-\left(1/3\right)^{n+1}\right]$

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2022-2023
1ère Année
MATH1

Contrôle

Exercice1 : *(12 pts)*

I. Soit l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = |2x+1| - 3x$$

1. f est-elle injective ?

2. f est-elle surjective ?

3. f est-elle bijective ? Si oui donner l'expression de $f^{-1}(x)$.

Exercice2 : *(8 pts)*

Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+7k+12} = \frac{n+1}{3(n+4)}$$

L1GI

Corrigé Contrôle 2022-2023

MATH1

Exercice 1: Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = |2x+1| - 3x.$

Il faut commencer par écrire l'expression de $f(x)$ sans valeur absolue.

$$f(x) = \begin{cases} (2x+1) - 3x & \text{si } (2x+1) \geq 0 \\ -(2x+1) - 3x & \text{si } (2x+1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \geq -1/2 \\ -5x-1 & \text{si } x \leq -1/2. \end{cases}$$

(2pts)

1. Injective Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2)$

1er cas: $x_1 \geq -1/2$ et $x_2 \geq -1/2 \Rightarrow \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -x_1 - 1 = -x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$ (1pt)

2ème cas: $x_1 \leq -1/2$ et $x_2 \leq -1/2 \Rightarrow \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -5x_1 - 1 = -5x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$ (1pt)

3ème et 4ème cas $x_1 \geq -1/2$ et $x_2 \leq -1/2 \Rightarrow \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -x_1 + 1 = -5x_2 - 1 \Rightarrow x_2 = \frac{x_1 - 2}{5}. \right.$

Attention $x_1 \geq -1/2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq -2 - 1/2 \Rightarrow \frac{x_1 - 2}{5} \geq \frac{-2 - 1/2}{5} = -1/2$

Donc si $x_1 \geq -1/2 \Rightarrow \frac{x_1 - 2}{5} \geq -1/2$ or $x_2 \leq -1/2$ Donc $x_2 = \frac{x_1 - 2}{5}$ refusé

(3pts)

f est injective.

2- Surjective: Soit $y \in \mathbb{R}$

$$y = f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \geq -1/2 \\ -5x-1 & \text{si } x \leq -1/2. \end{cases}$$

$x \geq -1/2 \Rightarrow -x + 1 \leq 3/2$

$x \leq -1/2 \Rightarrow -5x - 1 \geq 3/2$

Donc si $y \leq 3/2$

$y = -x + 1 \Rightarrow x = -y + 1$

Si $y \geq 3/2$

$y = -5x - 1 \Rightarrow x = -\frac{y+1}{5}.$

f est surjective (3pts)

3- f est bijective

D'après ce qui précède $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f^{-1}(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \leq 3/2 \\ -\frac{x+1}{5} & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

(2pts)

Exercice 2 : Montrons par récurrence que:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+7k+12} = \frac{n+1}{3(n+4)}$$

- Pour $n=0$ $\frac{1}{12} = \frac{1}{3\times 4}$ vérifiée pour $n=0$. (1pt)
- Supposons que: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+7k+12} = \frac{n+1}{3(n+4)}$ (Hypothèse de Récurrence HR) (1pt)
- Il faut montrer que $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2+7k+12} = \frac{n+2}{3(n+5)}$ (1pt)

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2+7k+12} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+7k+12} + \frac{1}{(n+1)^2+7(n+1)+12} \underset{HR}{=} \frac{n+1}{3(n+4)} + \frac{1}{(n+1)^2+7(n+1)+12}$$

$$= \frac{n+1}{3(n+4)} + \frac{1}{n^2+2n+1+7n+7+12}$$

$$= \frac{n+1}{3(n+4)} + \frac{1}{n^2+9n+20}$$

$$= \frac{n+1}{3(n+4)} + \frac{1}{(n+4)(n+5)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+5)}{3(n+4)(n+5)} + \frac{3}{3(n+4)(n+5)}$$

$$= \frac{n^2+6n+5+3}{3(n+4)(n+5)} = \frac{n^2+6n+8}{3(n+4)(n+5)} = \frac{(n+2)(n+4)}{3(n+4)(n+5)}$$

$$= \frac{n+2}{3(n+5)}$$ cqfd.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+7k+12} = \frac{n+1}{3(n+4)}$

(5 pts)

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2022-2023
1ère Année
MATH1

Contrôle

Exercice1 : *(12 pts)*

I. Soit l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 3x - |2x+1|$$

1. *f est-elle injective ?*

2. *f est-elle surjective ?*

3. *f est-elle bijective ? Si oui donner l'expression de* $f^{-1}(x)$.

Exercice2 : *(8 pts)*

Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+5k+6} = \frac{n+1}{2(n+3)}$$

L1. GI

MATH1. 2022-2023

Corrigé Contrôle.

Exercice 1 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = 3x - |2x+1|$

Il faut commencer par écrire l'expression de $f(x)$ sans valeur absolue

$$f(x) = \begin{cases} 3x - (2x+1) & \text{si } (2x+1) \geq 0 \\ 3x - [-(2x+1)] & \text{si } (2x+1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq -1/2 \\ 5x+1 & \text{si } x \leq -1/2 \end{cases}$$

(2pts)

1- Injective : Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

1er cas $x_1 \geq -1/2$, $x_2 \geq -1/2 \Rightarrow \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$ (1pt)

2ème cas $x_1 \leq -1/2$, $x_2 \leq -1/2 \Rightarrow \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 + 1 = 5x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$ (1pt)

3ème et 4ème cas $x_1 \geq -1/2$, $x_2 \leq -1/2 \Rightarrow \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = 5x_2 + 1 \Rightarrow x_2 = \frac{x_1 - 2}{5} \right)$

Attention $x_1 \geq -1/2 \Rightarrow x_1 - 2 \geq -1/2 - 2 \Rightarrow \frac{x_1 - 2}{5} \geq \frac{-\frac{1}{2} - 2}{5} = -1/2$

Donc si $x \geq -1/2 \Rightarrow \frac{x_1 - 2}{5} \geq -1/2$ or $x_2 \leq -1/2$ Donc $x_2 = \frac{x_1 - 2}{5}$ est réfusé.

f est injective. (3pts)

2- Surjective : Soit $y \in \mathbb{R}$

$$y = f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq -1/2 \\ 5x+1 & \text{si } x \leq -1/2 \end{cases}$$

$x \geq -1/2 \Rightarrow x - 1 \geq -1/2 - 1 = -3/2$

$x \leq -1/2 \Rightarrow 5x+1 \leq 5 \times -\frac{1}{2} + 1 = -3/2$

Donc si $y \geq -3/2$

$y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$.

si $y \leq -3/2$

$y = 5x+1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{5}$.

f est surjective (3pts)

3- f est bijective.

D'après ce qui précède $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -\frac{3}{2} \\ \frac{x-1}{5} & \text{si } x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

(2pts)

Exercice 2 : Montrons par récurrence que.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+5k+6} = \frac{n+1}{2(n+3)}$$

- Pour $n=0$ $\quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$ relation vérifiée. (1pt)
- Supposons que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+5k+6} = \frac{n+1}{2(n+3)}$ (Hypothèse de récurrence HR) (1pt)
- Il faut montrer que $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2+5k+6} = \frac{n+2}{2(n+4)}$ (1pt)

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2+5k+6} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+5k+6} + \frac{1}{(n+1)^2+5(n+1)+6} \underset{HR}{=} \frac{n+1}{2(n+3)} + \frac{1}{(n+1)^2+5(n+1)+6}$$

$$= \frac{n+1}{2(n+3)} + \frac{1}{n^2+2n+1+5n+5+6} = \frac{n+1}{2(n+3)} + \frac{1}{n^2+7n+12}$$

$$= \frac{n+1}{2(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{(n+1)(n+4)}{2(n+3)(n+4)} + \frac{2}{2(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{n^2+5n+6}{2(n+3)(n+4)} = \frac{(n+2)(n+3)}{2(n+3)(n+4)}$$

$$= \frac{n+2}{2(n+4)} \text{ cqfd.}$$

(5pts)

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+5k+6} = \frac{n+1}{2(n+3)}$.