Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Test 1

Nom et Prénom : **Groupe :**

Montrer par deux méthodes différentes que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{2(n+1)}$$

1ère méthode Par récurrence

(03pts)

· Pour $n=2$ $\quad \frac{1}{2(2+1)} = \frac{1}{6} = \frac{2-1}{2(2+1)} = \frac{1}{6}$

(02pts)

· On suppose que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{2(n+1)}$ (H.R)

(02pts)

· On doit montrer que : $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(n+1)-1}{2[(n+1)+1]} = \frac{n}{2(n+2)}$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{H.R}{=} \frac{n-1}{2(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n-1)(n+2)+2}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+n}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$$ cqfd.

07pts

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-1}{2(n+1)}$.

2ème méthode : Directe

(2pts)

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1+k}{k(\cancel{k+1})} - \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-2}{2(n+1)}$$

$$= \frac{(n-1)}{2(n+1)}$$ cqfd.

(04pts)

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
1ère Année
Algèbre

Test 1

Nom et Prénom : **Groupe :**

Montrer par deux méthodes différentes que :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-2}{3(n+1)}$$

1ère méthode Par récurrence

- Pour $n=3$ $\quad \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{12} = \frac{3-2}{3(3+1)} = \frac{1}{12}$. (03pts)
- On suppose que $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-2}{3(n+1)}$ (H.R) (02pts)
- On doit montrer que $\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(n+1)-2}{3(n+1+1)} = \frac{n-1}{3(n+2)}$. (02pts)

$$\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{HR}{=} \frac{n-2}{3(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n-2)(n+2)+3}{3(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2-4+3}{3(n+1)(n+2)} = \frac{n^2-1}{3(n+1)(n+2)} = \frac{(n-1)\cancel{(n+1)}}{3\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n-1}{3(n+2)} \quad \text{cqfd.}$$

(07pts)

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3,\ \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-2}{3(n+1)}$.

2ème méthode : Directe

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1+\cancel{k}}{k(\cancel{k+1})} - \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$ (02pts)

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-3}{3(n+1)} = \frac{n-2}{3(n+1)} \quad \text{cqfd.}$$ (04pts)

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
1ère Année
Algèbre

Test 1

Nom et Prénom : **Groupe :**

Montrer par deux méthodes différentes que :

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-3}{4(n+1)}$$

1ère méthode : Par récurrence

- Pour $n=4$ $\quad \frac{1}{4(4+1)} = \frac{1}{20} = \frac{4-3}{4(4+1)} = \frac{1}{20}$ (03pts)
- On suppose que $\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-3}{4(n+1)}$ (HR). (02pts)
- On doit montrer que $\sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(n+1)-3}{4[(n+1)+1]} = \frac{n-2}{4(n+2)}$ (02pts)

$$\sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{HR}{=} \frac{n-3}{4(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n-3)(n+2)+4}{4(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2-n-2}{4(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n-2)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n-2}{4(n+2)}$$ cqfd. (07pts)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, $\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n-3}{4(n+1)}$

2ème méthode Directe :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1+k-k}{k(k+1)} = \frac{1+k}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$ (02pts)

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=4}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{6}} - \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{k=4}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-4}{4(n+1)} = \frac{n-3}{4(n+1)}$$ cqfd (04pts).