Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2016-2017
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Rattrapage

Exercice 1 : (10 points)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A$, et en déduire (sans calculer le déterminant) que A est inversible puis donner A^{-1}.

2. Retrouver A^{-1}, en utilisant la formule $A^{-1} = \frac{1}{detA}\ {}^t com(A)$.

3. Par deux méthodes différentes, montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3 \times 2^n - 3 & 3 \times 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : (10 points)

Soient E et F deux ensembles donnés. Soient $E_1 \subset E$ et $F_1 \subset F$, on note $E_2 = C_E E_1$ le complémentaire de E_1 dans E, et on note $F_2 = C_F F_1$ le complémentaire de F_1 dans F.

Soient deux applications données

$$f_1 : E_1 \longrightarrow F_1$$

$$f_2 : E_2 \longrightarrow F_2$$

On définit alors l'application $f : E \longrightarrow F$ par

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & si\ x \in E_1 \\ f_2(x) & si\ x \in E_2 \end{cases}$$

1. Montrer que

$$(f\ est\ injective) \Leftrightarrow (f_1\ et\ f_2\ sont\ injectives)$$

2. Montrer que

$$(f\ est\ surjective) \Leftrightarrow (f_1\ et\ f_2\ sont\ surjectives)$$

Algèbre

Corrigé de l'Examen de Rattrapage

Exercice 1 : $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1- $A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I.$

ainsi $A^2 - 3A = -2I$ donc $-\frac{1}{2}(A^2 - 3A) = I$

et par suite $A\left[-\frac{1}{2}(A - 3I)\right] = \left[-\frac{1}{2}(A-3I)\right]A = I$

ce qui permet de conclure que A est inversible et que

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3I) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$ 02pts

2- $\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$

$Com(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^tCom(A) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ 02pts

3.- 1ère méthode : Par récurrence : $A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3\times 2^n - 3 & 3\times 2^n - 2 \end{pmatrix}$

pour $n = 1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^2 & 2 - 2^2 \\ 3\times 2 - 3 & 3\times 2 - 2 \end{pmatrix}$ vérifiée.

On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3\times 2^n - 3 & 3\times 2^n - 2 \end{pmatrix}$ et il faut montrer que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+2} & 2 - 2^{n+2} \\ 3\times 2^{n+1} - 3 & 3\times 2^{n+1} - 2 \end{pmatrix}$

or $A^{n+1} = A^n . A = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3\times 2^n - 3 & 3\times 2^n - 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+2} & 2 - 2^{n+2} \\ 3\times 2^{n+1} - 3 & 3\times 2^{n+1} - 2 \end{pmatrix}.$

02pts

2ème méthode : D'après la première question, on sait que :

$$A^2-3A+2I=[0]$$

D'un autre côté $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$

Si l'on effectue une division euclidienne de X^n par X^2-3X+2 on obtient

$$X^n=(X^2-3X+2)Q(X)+aX+b.$$

En remplaçant X par 1 ; puis par 2 on obtient les valeurs de a et b.

$$X^n=(X^2-3X+2)Q(X)+(2^n-1)X+2-2^n.$$

On remplace X par la matrice A et on a :

$$A^n=\underbrace{(A^2-3A+2I)}_{0}Q(A)+(2^n-1)A+(2-2^n)I$$

Donc $$A^n=(2^n-1)\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+(2-2^n)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

après calcul on retrouve la formule demandée

$$A^n=\begin{pmatrix}3-2^{n+1} & 2-2^{n+1}\\ 3\times2^n-3 & 3\times2^n-2\end{pmatrix}$$

04pts

EXERCICE 2

1. $(f \text{ injective}) \Longleftrightarrow (f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont injectives})$

"$\Longrightarrow$" hypothèse f injective.

Soit $x_1, x_2 \in E_1$ $\quad f_1(x_1)=f_1(x_2) \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ (sur E_1, f_1 et f coïncident)

$\Longrightarrow x_1=x_2$ car f est injective.

Donc f_1 est injective.

[On peut aussi voir que f_1 est la restriction de f à E_1, comme f est injective ; f_1 le sera aussi].

On fait le même raisonnement pour montrer que f_2 est injective ; il suffit de remplacer E_1 par E_2.

02pts

"$\Longleftarrow$" Hypothèse f_1 et f_2 injectives.

Soit $x_1, x_2 \in E$; $f(x_1) = f(x_2)$ (il faut montrer que $x_1 = x_2$)

<u>1er Cas</u> $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_1$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f_1(x_1) = f_1(x_2)$ (Car sur E_1, f_1 et f coïncident)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (car f_1 est supposée injective)

<u>2ème Cas</u>: $x_1 \in E_2$ et $x_2 \in E_2$.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f_2(x_1) = f_2(x_2)$ (Car sur E_2, f_2 et f coïncident)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (Car f_2 est supposée injective)

<u>3ème cas et 4ème cas</u> $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ (ou $x_1 \in E_2$ et $x_2 \in E_1$)

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f_1(x_1) = f_2(x_2)$

N'oublions pas que $f_1 : E_1 \longrightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \longrightarrow F_2 = \complement_F F_1$

Donc $f_1(x_1) \in F_1$ et $f_2(x_2) \in F_2 = \complement_F F_1$ ($F_1 \cap F_2 = \phi$)

Donc il est impossible d'avoir $f_1(x_1) = f_2(x_2)$

En conclusion les 3ème et 4ème cas ne peuvent pas se produire.

En conclusion $\forall x_1, x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

f est injective.

03pts

2. (f surjective) $\Leftrightarrow$ (f_1 et f_2 sont surjectives)

"$\Longrightarrow$" Hypothèse f surjective.

Montrons que f_1 est surjective.

Soit $y \in F_1 \Rightarrow y \in F$ ($F_1 \subset F$)

$\Rightarrow \exists x \in E$; $y = f(x)$ car f est supposée surjective

$x \in E$ soit que $x \in E_1$ ou $x \in E_2$

Supposons par l'absurde que $x \in E_2$ alors dans ce cas

$f(x) = f_2(x) \in F_2$

or $y = f(x) \in F_1$ (par hypothèse) et comme $F_1 \cap F_2 = \phi$

$x \notin E_2$ et donc $x \in E_1$.

Donc $\forall y \in F_1, \exists x \in E_1 ; y = f_1(x)$. donc f_1 est surjective.

(Faire un raisonnement analogue pour f_2). 03pts

"$\Leftarrow$" Hypothèse f_1 et f_2 surjectives.

Soit $y \in F$. Rappelons que $F_2 = \complement_F F_1$ donc $F_1 \cup F_2 = F$ et $F_1 \cap F_2 = \phi$.

Donc soit que $y \in F_1$ ou que $y \in F_2$.

- si $y \in F_1$, $\exists x \in E_1$, $y = f_1(x)$ car f_1 est surjective.

et donc $\exists x \in E_1 \subset E ; y = f(x)$ car f_1 et f coïncident sur E_1.

- si $y \in F_2$, $\exists x \in E_2 ; y = f_2(x)$ car f_2 est surjective

et donc $\exists x \in E_2 \subset E, y = f(x)$ car f_2 et f coïncident sur E_2.

En conclusion $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

et par suite f est surjective. 02pts