Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2021-2022
Master I
Probabilités-Statistiques I

Examen de Rattrapage

Exercice1 : (12pts)

On rappelle que la loi de Poisson $P(\lambda)$ est définie par : $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$; pour $k = 0, 1, 2 \ldots, n, \ldots$

1. ***Vérifier que $P(\lambda)$ définit bien une loi de probabilité.***
2. ***Calculer $E(X)$.***
3. ***Calculer $V(X)$.***

Exercice 2 : (08pts)

Dans une ville, il existe deux compagnies de taxis : les Verts, qui représentent 85% de la flotte totale, et les Bleus, qui ont les 15% restants.

Un accident survient la nuit, un taxi est impliqué et il prend la fuite. Un témoin affirme qu'il s'agissait d'un taxi Bleu. Sachant que la fiabilité de la vision pour ne pas confondre bleu et vert la nuit est de 80% (la nuit le gens identifient correctement la différence entre bleu et vert dans 80% des cas, et se trompent dans 20%)

Quelle est la probabilité que le taxi responsable soit effectivement un Bleu?

Corrigé Rattrapage

M1 - GI
2021 - 2022

Proba-Stat I

Elements de réponses.

Ex 1. Loi de Poisson $P(\lambda)$, pour $X = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

$$P_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

1/ On a bien $P_k \geq 0$ il suffit de vérifier que $\sum_k P_k = 1$.

$$\sum_k P_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

2/ $$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k P_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

$$E(X) = \lambda.$$

3/ $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}}{k!} \lambda^k = \lambda^2 + \lambda$$

(Pour le détail voir Cours. Il suffit d'utiliser un argument similaire à celui fait en question 1)

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

$$V(X) = \lambda.$$

Exercice 2 :

Notons les évènements suivants :

B : le taxi est bleu.

TB : le témoin affirme que le taxi est bleu.

V : le taxi est vert.

TV : le témoin affirme que le taxi est vert.

$P(B) = 0,15 \qquad P(V) = 0,85$

$P(TB/B) = P(TV/V) = 0,8 \quad ; \quad P(TB/V) = P(TV/B) = 0,2.$

la probabilité demandée est : $P(B/TB)$.

B et V forment une partition de l'ensemble fondamental (la flotte totale) On peut alors appliquer la formule de Bayes.

$$P(B/TB) = \frac{P(TB/B) \times P(B)}{P(TB/B)P(B) + P(TB/V) \cdot P(V)} = \frac{0,15 \times 0,8}{0,29}$$

$$= 0,414$$