Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2021-2022
1ère Année
Algèbre

Examen de Rattrapage

Exercice1 : (08 pts)

En utilisant le degré comme unité de mesure, montrer que cos(1) est irrationnel.

Exercice2 : (12 pts=2pts+5pts+5pts)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Calculer* A^{-1}.
2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$; *En utilisant la décomposition* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *donner l'expression de* A^n.
3. *Démontrer l'expression de* A^n *trouvée dans la question précédente par récurrence.*

2021-2022
L1GI.

Corrigé type
Rattrapage Algèbre

Exercice 1:

Supposons par l'absurde que $Cos(1)$ (Cosinus 1 degré) est rationnel.

Et faisons un raisonnement par récurrence pour montrer alors que $Cos(n)$ $n \in \mathbb{N}^*$ est aussi rationnel.

en effet $Cos(1)$ rationnel hypothèse faite par l'absurde

supposons alors que $Cos(n)$ est rationnel

$Cos(n)$ et $cos(1)$ sont rationnels.

On a par les formules trigonométriques:

$$Cos(n+1) = Cos(n)\,Cos(1) - \sin(n)\sin(1)$$
$$Cos(n-1) = Cos(n)\,Cos(1) + \sin(n)\sin(1)$$

En faisant la somme on obtient que

$$Cos(n+1) = 2\,Cos(n)\,Cos(1) - Cos(n-1).$$

Donc nécessairement $Cos(n+1)$ est rationnel.

Ainsi partant de l'hypothèse émise par l'absurde que $Cos(1)$ est rationnel on arrive à montrer que $\forall n \geq 1$ $Cos(n)$ est aussi rationnel, ce qui absurde car par exemple:

$$Cos(45) = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ qui est irrationnel}$$

d'où la contradiction

donc $Cos(1)$ est irrationnel.

08pts

Exercice 2 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1/ $\det A = 27 \neq 0$ A est inversible et A^{-1} existe

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 & 1/27 \\ 0 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$ (2pts)

2/ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3I + M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On observe que

$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pour $n \geq 3$ $M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il suffit alors de développer l'expression :

$$A^n = (3I + M)^n = 3^n I + 3^{n-1} \times n M + 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} M^2.$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

5pts

3/ On démontre que $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ par récurrence

Pour $n = 1$ $A^1 = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ vérifié.

On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^n = A^{n+1} = \begin{pmatrix} 3^{n+1} & (n+1)3^n & \frac{(n+1)n\, 3^{n-1}}{2} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

(5pts)