Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2018-2019
$1^{ère}$ Année
Outils Mathématiques

Examen final

Exercice3 : (07pts)

Calculer ce qui suit :

$$I_1 = \int \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$$

$$I_2 = \int \frac{-3x+1}{x^2+5x+9}\,dx$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{(4x-x^2)}}\,dx$$

Exercice2 : (07 pts)

Résoudre l'équation différentielle linéaire suivante :

$$x(1+ln^2(x))y' + 2ln(x)y = 1,$$

puis trouver l'unique solution qui vérifie $y(e) = 5$.

Exercice3 : (06pts)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, un paramètre réel non nul. Résoudre l'équation suivante :

$$y'' + y = \lambda x,$$

puis trouver la valeur de λ pour que l'équation précédente admette une solution vérifiant

$$y(0) = 0 \; et \; y(2\pi) = 1.$$

Outils Mathématiques.

Examen final (2018-2019) L1GI

Corrigé type.

Exercice 1:

1/ $I_1 = \int \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}dx$ on pose le changement $t=\sqrt{1-x} \Rightarrow x = 1-t^2$

$\Rightarrow dx = -2t\,dt$

$$I_1 = \int \frac{-2t\,dt}{1+t} = -2\int \frac{t}{1+t}dt = -2\int \frac{1+t-1}{1+t}dt = -2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= -2(t-\ln(t+1))+C = 2\ln(1+\sqrt{1-x}) - 2\sqrt{1-x}+C.$$ 02pts

$$\boxed{I_1 = 2\ln(1+\sqrt{1-x}) - 2\sqrt{1-x}+C \quad C\in\mathbb{R}}$$

2/ $I_2 = \int \frac{-3x+1}{\underbrace{x^2+5x+9}_{\Delta<0}}dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(2x+5)+\frac{15}{2}+1}{x^2+5x+9}dx = -3/2\ln(x^2+5x+9)+\frac{17}{2}\int\frac{1}{x^2+5x+9}dx.$

$$x^2+5x+9 = x^2+2\tfrac{5}{2}x+9 = \left(x+\tfrac{5}{2}\right)^2-\tfrac{25}{4}+9 = \left(x+\tfrac{5}{2}\right)^2+\tfrac{11}{4}$$

$$J = \int\frac{1}{x^2+5x+9}dx = \int\frac{1}{(x+\frac{5}{2})^2+\frac{11}{4}}dx = \frac{4}{11}\int\frac{dx}{\frac{4}{11}(x+\frac{5}{2})^2+1} = \frac{4}{11}\int\frac{dx}{\left(\frac{2x+5}{\sqrt{11}}\right)^2+1}$$

on pose $t=\frac{2x+5}{\sqrt{11}} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{11}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{11}}{2}dt$

$$J = \frac{4}{11}\int\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{t^2+1}dt = \frac{2}{\sqrt{11}}\int\frac{1}{t^2+1}dt = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan t = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2x+5}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\boxed{I_2 = -3/2\ln(x^2+5x+9)+\frac{17}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2x+5}{\sqrt{11}}\right)+C} \quad C\in\mathbb{R}$$ 02pts

3/ $I_3 = \int\frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{-(x^2-4x)}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{-[(x-2)^2-4]}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx$

$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}dx$ on pose $t=\frac{x-2}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2}dx \rightarrow dx = 2dt.$

$$I_3 = \int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$$

$$\boxed{I_3 = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C} \quad C\in\mathbb{R}$$ 03pts

Exercice 2:

$$x(1+\ln^2 x)\,y' + 2\ln x\, y = 1 \Rightarrow y' + \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,y = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$$

$$I = \int \frac{2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\,dx \quad \text{on pose } t = \ln x \Rightarrow dt = \tfrac{1}{x}\,dx$$

$$I = \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \ln(1+t^2) = \ln(1+\ln^2 x) \Rightarrow e^{I} = 1+\ln^2 x$$

[Facteur intégrant]

1pt

Notre équation devient alors :

$$(1+\ln^2 x)\,y' + \frac{2\ln x}{x}\,y = \frac{1}{x} \Rightarrow \left[(1+\ln^2 x)\,y\right]' = \frac{1}{x}$$

Donc $(1+\ln^2 x)\,y = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$

Donc $\boxed{y = \dfrac{\ln x + C}{1+\ln^2 x}}$ 03pts

$$y(e) = 5 \Rightarrow \frac{\ln e + C}{1+\ln^2 e} = 5 \Rightarrow \frac{1+C}{1+1} = 5 \Rightarrow C = 9.$$

$\boxed{y = \dfrac{\ln x + 9}{1+\ln^2 x}}$ 03pts

Exercice 3: $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $(\lambda \neq 0)$.

$$y'' + y = \lambda x$$

ESSM $y'' + y = 0$

Eq caractéristique $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r = 0 \pm i.$

la solution générale de l'ESSM est donnée par

$$y_0 = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\,e^{0x}$$

$\boxed{y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x}$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ 1pt

Pour trouver y_* la solution particulière de l'EASM

on peut utiliser la variation des constantes ; mais ce n'est pas

nécessaire ; il est évident que $y_* = \alpha x$ est une solution particulière

Donc $y = y_0 + y_*$

$$\boxed{y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \alpha x}$$ 03 pts

$y(0)=0$ et $y(2\pi)=1$.

$y(0)=0 \Rightarrow C_1 = 0$

$y(2\pi)=1 \Rightarrow \alpha 2\pi = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\pi}$

Donc $\boxed{\alpha = \frac{1}{2\pi}}$ 02 pts