Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2016-2017
1ère Année
Outils Mathématiques

Examen final

Important :

La note de l'exercice 1 sera comptabilisée comme note du test CC.

Exercice 1 et Test CC : (08 points)

Calculer ce qui suit :

1. $I_1 = \int arcsinx\, dx$
2. $I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$
3. $I_3 = \int \frac{x^3}{x^2+4} dx$
4. $I_4 = \int_{-2}^{2} x^3 e^{-x^2} dx$

Exercice 2 : (05 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre donné, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^6 - (2cos\alpha)z^3 + 1 = 0$$

Exercice 3 : (07 points)

1. Calculer (dans $\mathbb{C}$) les racines n-ièmes de (-4)
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0$$

Examen final

Outils Mathématiques

Corrigé.

Exercice 1 :

- $I_1 = \int \arcsin x \, dx$; Par parties $\begin{cases} f = \arcsin x \longrightarrow f' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g' = 1 \longrightarrow g = x \end{cases}$ 0,5 pt

$$I_1 = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{-1/2}\,dx$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c \; ; \quad \boxed{I_1 = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \quad c \in \mathbb{R}}$$ 1,5 pt

- $I_2 = \int \dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

$$4x - x^2 = 4 - 4 + 4x - x^2 = 4 - (x^2 - 4x + 4) = 4 - (x-2)^2 = 4\left[1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right]$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{4\left[1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2\right]}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}\,dx$$

On pose $t = \dfrac{x-2}{2} \Longrightarrow dx = 2dt$. 0,5 pt

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow I_2 = \arcsin t + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + c \quad c \in \mathbb{R}}$$ 1,5 pt

- $I_3 = \int \dfrac{x^3}{x^2+4}\,dx$

Il faut commencer par faire une division Euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+4 \\ \hline -x^3 - 4x & x \\ \hline -4x & \end{array} \qquad \frac{x^3}{x^2+4} = x - \frac{4x}{x^2+4}.$$ 0,5 pt

$$I_3 = \int \left(x - \frac{4x}{x^2+4}\right)dx = \int x\,dx - 2\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{I_3 = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x^2+4) + c}$$ 1,5 pt

$$I_4 = \int_{-2}^{+2} x^3 e^{-x^2} dx.$$

Il faut observer que $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[-2,2]$)

et elle est impaire, car $f(-x) = (-x)^3 e^{-(-x)^2} = -x^3 e^{-x^2} = -f(x)$. 0,5pt

Donc $\boxed{I_4 = \int_{-2}^{+2} x^3 e^{-x^2} dx = 0}$ 1,5pt

EXERCICE 2 : $z^6 - (2\cos\alpha) z^3 + 1 = 0.$

on pose $z^3 = Z$ l'équation devient : $Z^2 - (2\cos\alpha) Z + 1 = 0$

$\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha = (2i\sin\alpha)^2.$ 1pt

$Z_1 = \dfrac{2\cos\alpha - 2i\sin\alpha}{2} = \cos\alpha - i\sin\alpha \Rightarrow Z_1 = e^{-i\alpha}$

$Z_2 = \dfrac{2\cos\alpha + 2i\sin\alpha}{2} = \cos\alpha + i\sin\alpha \Rightarrow Z_2 = e^{i\alpha}$ 1pt

Les solutions de notre équation de départ sont les racines cubiques de Z_1, Z_2

$z^3 = Z_1$; $z = re^{i\theta} \Rightarrow r^3 e^{3i\theta} = e^{-i\alpha} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 3\theta = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = -\dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$ $k = 0, 1, 2.$

$z^3 = Z_2$ $z = re^{i\theta} \Rightarrow r^3 e^{3i\theta} = e^{i\alpha} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 3\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{\alpha}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$ $k = 0, 1, 2.$

l'ensemble des solutions est donné par :

$$S = \left\{ e^{-i\alpha/3}, e^{i\left(\frac{2\pi-\alpha}{3}\right)}, e^{i\left(\frac{4\pi-\alpha}{3}\right)}, e^{i\alpha/3}, e^{i\left(\frac{\alpha+2\pi}{3}\right)}, e^{i\left(\frac{\alpha+4\pi}{3}\right)} \right\}$$ 3pts

EXERCICE 3 :

1/ racines n-ièmes de (-4) ; $-4=4e^{i\pi}$

$\omega = re^{i\theta}$ racine n-ième de -4 (i.e) $\omega^n = -4$

$$r^n e^{in\theta} = 4e^{i\pi} \Longrightarrow \begin{cases} r^n = 4 \\ n\theta = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 4^{1/n} \\ \theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{n} \end{cases} ; \ k = 0, 1, \cdots (n-1)$$

les racines n-ièmes de (-4) sont :

$$\omega_1 = 4^{1/n} e^{i\pi/n}, \ \omega_2 = 4^{1/n} e^{3i\pi/n}, \ \omega_3 = 4^{1/n} e^{\frac{5i\pi}{n}}, \cdots, \omega_n = 4^{1/n} e^{\frac{(2n-1)i\pi}{n}}.$$

02pts

2/

$$(z+1)^4 - 4(z-1)^4 = 0 \Rightarrow (z+1)^4 = -4(z-1)^4 \Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = -4$$

(on peut diviser par $(z-1)$ car $z=1$ n'est pas solution).

si on pose $\omega = \dfrac{z+1}{z-1}$ l'équation devient $\omega^4 = -4$

02pts

il suffit alors de considerer $n=4$ dans la première question

$$\omega^4 = -4 \Longrightarrow \omega_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \ \omega_2 = \sqrt{2}\, e^{3i\pi/4}, \ \omega_3 = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}, \ \omega_4 = \sqrt{2}\, e^{\frac{7i\pi}{4}}.$$

Or $\omega = \dfrac{z+1}{z-1} \Rightarrow \omega(z-1) = z+1 \Rightarrow z(\omega-1) = \omega+1 \Rightarrow z = \dfrac{\omega+1}{\omega-1}$

l'ensemble des solutions est donné par :

$$S = \left\{ z_1 = \frac{\omega_1+1}{\omega_1-1}, \ z_2 = \frac{\omega_2+1}{\omega_2-1}, \ z_3 = \frac{\omega_3+1}{\omega_3-1}, \ z_4 = \frac{\omega_4+1}{\omega_4-1} \right\}.$$

03pts