Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2021-2022
1ère Année
Outils Mathématiques

Examen final

***Exercice1:** (10pts=4pts+3pts+3pts)*

1. *Donner le développement de Taylor-MacLaurin à l'ordre n= 3, des fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = e^{3x} \quad et \quad f_2(x) = sin(5x)$$

2. *En utilisant ce qui précède, calculer la limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{3x} - sin(5x)}{x}$$

3. *Donner l'expression de la dérivée n-ième de la fonction $f_2(x) = sin(5x)$.*

***Exercice2:** (10pts=2pts+4pts+4pts)*

Calculer ce qui suit :

1.

$$I_1 = \int xe^x dx$$

2.

$$I_2 = \int \frac{3x-2}{x^2+3x+5} dx$$

3. *Soient*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{lnx}{1+x^2} dx$$

$$J = \int_{1}^{2} \frac{lnx}{1+x^2} dx$$

a. *Sans les calculer, trouver une relation entre I et J.*

b. *Déduire la valeur de*

$$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{lnx}{1+x^2} dx$$

L1. GI. 2021 - 2022

Outils Mathématiques

Corrigé-type

Exercice 1 :

1. Formule de Taylor-MacLaurin $n=3$.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + o(x^3).$$

$$= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + x^3\varepsilon(x) \quad (\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0)$$

$f_1(x) = e^{3x} \Rightarrow f_1(0) = 1.$

$f_1'(x) = 3e^{3x} \Rightarrow f_1'(0) = 3$

$f_1''(x) = 3^2 e^{3x} \Rightarrow f_1''(0) = 3^2$

$f_1'''(x) = 3^3 e^{3x} \Rightarrow f_1'''(0) = 3^3$

$f_1(x) = e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)$

(2pts)

$f_2(x) = \sin(5x) \Rightarrow f_2(0) = 0$

$f_2'(x) = 5\cos(5x) \Rightarrow f_2'(0) = 5$

$f_2''(x) = -5^2\sin(5x) \Rightarrow f_2''(0) = 0$

$f_2'''(x) = -5^3\cos(5x) \Rightarrow f_2'''(0) = -5^3.$

$f_2(x) = \sin(5x) = 5x - \frac{(5x)^3}{3!} + x^3\varepsilon_2(x)$

(2pts)

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{3x} - \sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)\right) - \left(5x - \frac{(5x)^3}{3!} + x^3\varepsilon_2(x)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-8x - \frac{(3x)^2}{2!} - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(5x)^3}{3!} - x^3\varepsilon(x)}{x} = -8$$

(3pts)

3. $f_2(x) = \sin(5x)$, $f_2'(x) = 5\cos(5x) = 5\sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f_2''(x) = -5^2\sin(5x) = 5^2\sin\left(5x + 2\frac{\pi}{2}\right)$ . . . .

On propose donc $f_2^{(n)}(x) = 5^n\sin\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

formule qu'on démontre par récurrence

$n=1$ $f_2'(x) = 5\sin\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) = 5^1\sin\left(5x + 1\times\frac{\pi}{2}\right)$ c'est bien vérifiée.

On suppose que $f_2^{(n)}(x) = 5^n\sin\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right)$ (HR)

On montre que $f_2^{(n+1)}(x) = 5^{n+1}\sin\left(5x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

En effet : $f_2^{(n+1)}(x) = \left[f_2^{(n)}(x)\right]' = 5^{n+1}\cos\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right) = 5^{n+1}\sin\left(5x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

$= 5^{n+1}\sin\left(5(x) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ cqfd.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $f_2^{(n)}(x) = 5^n\sin\left(5x + n\frac{\pi}{2}\right)$

(3pts)

Exercice 2:

1. $I_1 = \int x e^x dx$ intégration par parties $\left\langle \begin{array}{l} f = x \longrightarrow f' = 1. \\ g' = e^x \longrightarrow g = e^x. \end{array} \right.$

$$I_1 = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$I_1 = (x-1) e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

(02pts)

2. $I_2 = \int \frac{3x-2}{\underbrace{x^2+3x+5}} dx$ $\longrightarrow$ $\Delta = 9 - 4\times 5 = -11 < 0$ intégration d'un élément simple de type III.

$$I_2 = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+3) - 9/2 - 2}{x^2+3x+5} dx = 3/2 \int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx - \frac{13}{2} \int \frac{1}{x^2+3x+5} dx.$$

$$= 3/2 \ln(x^2+3x+5) - \frac{13}{2} J. \qquad \text{avec} \quad J = \int \frac{1}{x^2+3x+5} dx.$$

$$x^2+3x+5 = x^2 + 2\cdot\frac{3}{2} x + 5 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 5 - \frac{9}{4} = (x + 3/2)^2 + \frac{11}{4}.$$

$$J = \int \frac{1}{x^2+3x+5} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2 + \frac{11}{4}} dx = \frac{1}{\frac{11}{4}} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{4}{11} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1} dx$$

On pose $t = \frac{2x+3}{\sqrt{11}} \Rightarrow dt = \frac{2}{\sqrt{11}} dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{11}}{2} dt$

$$J = \frac{4}{11} \int \frac{1}{t^2+1} \frac{\sqrt{11}}{2} dt = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right).$$

$$I_2 = \frac{3}{2} \ln(x^2+3x+5) - \frac{13}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+3}{\sqrt{11}}\right) + c$$

$(c \in \mathbb{R})$ (04pts)

3. $I = \int_{1/2}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$; $J = \int_{1}^{2} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$

a. Dans I posons le changement de variable $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2} dx$

$t = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = t^2 \Rightarrow$ donc $dx = -\frac{dt}{t^2}$ $\Big/ \begin{array}{l} x = 1/2 \Rightarrow t = 2 \\ x = 1 \Rightarrow t = 1. \end{array}$

$$I = \int_2^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{1 + \frac{1}{t^2}} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \int_2^1 \frac{-\ln t}{1+t^2} (-dt) = \int_2^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = -\int_1^2 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

Ainsi $I = -J$. (2pts)

b. $$\int_{1/2}^{2} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \underbrace{\int_{1/2}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_1^2 \frac{\ln x}{1+x^2} dx}_{\text{Relation de Chasles.}} = I + J = 0.$$

(2pts)