Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2020-2021
$1^{ère}$ Année
Outils Mathématiques

Examen final

Exercice1: (10pts=3pts+4pts+3pts)

Calculer ce qui suit :

1. $I_1 = \int x^5 lnx dx$
2. $I_2 = \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx$
3. $I_3 = \int_{-1}^{+1} (1+x^3)^4 x^2 dx$

Exercice2: (10pts=3pts+3pts+4pts)

1. Résoudre l'ESSM suivante

$$y'' + 4y = 0$$

2. Trouver les nombres réels a, b, c pour que $y_* = ax^2 + bx + c$, soit une solution particulière de l'équation

$$y'' + 4y = 3x^2 - 2$$

3. Trouver l'unique solution de l'équation $y'' + 4y = 3x^2 - 2$ vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

Examen Outils Mathématiques
L1. GI. Corrigé

Exercice 1

- $I_1 = \int x^5 \ln x \, dx$ (par parties) $\quad f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x} \quad g' = x^5 \quad g = \frac{1}{6}x^6$

$$I_1 = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \int \frac{1}{6}x^6 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx$$

$$I_1 = \frac{1}{6}x^6 \ln x - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}x^6 + C = \frac{1}{6}x^6\left[\ln x - \frac{1}{6}\right] + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

(03 pts)

- $I_2 = \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx \qquad x^2+2x+3=0 \qquad \Delta = 4-12=-8<0$

$$I_2 = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx - 2\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - 2J$$

$$J = \int \frac{1}{x^2+2x+3}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{2}+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx \qquad \text{On pose } t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2}}dx \Rightarrow dx = \sqrt{2}\,dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg} t = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

(04 pts)

- $I_3 = \int_{-1}^{+1} (1+x^3)^4 x^2 dx \qquad$ On pose $t = (1+x^3) \Rightarrow dt = 3x^2dx$
$x=-1 \Rightarrow t=0, \; x=1 \Rightarrow t=2.$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 t^4 dt = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^2 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times 2^5$$

$$I_3 = \frac{32}{15}$$

(03pts)

Exercice 2 :

1. $y''+4y=0$.

Eq caractéristique : $r^2+4=0 \Rightarrow r^2=-4=4i^2=4i^2=(2i)^2$

$r = 0 \pm 2i$.

La solution générale de l'ESSM est donnée par :

$$\boxed{y_0 = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x} \quad (3pts)$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2. $y_* = ax^2+bx+c$; $y_*' = 2ax+b$; $y_*'' = 2a$

$y_*''+4y_* = 2a+4(ax^2+bx+c)$

$= 4ax^2+4bx+2a+4c = 3x^2-2$

Par identification : $\begin{cases} 4a=3 \\ 4b=0 \\ 2a+4c=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3/4 \\ b=0 \\ c=-7/8 \end{cases}$

$$\boxed{y_* = 3/4\, x^2 - 7/8} \quad (3pts).$$

3. La solution générale de l'EASM : $y''+4y=3x^2-2$ est donnée par :

$y = y_0 + y_* = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + 3/4\, x^2 - 7/8$ (01 pt)

$y(0) = C_1 - 7/8 = 0 \Rightarrow C_1 = 7/8$.

$y'(x) = -2\times(+7/8)\sin 2x + 2C_2\cos 2x + 3/2\, x$.

$y'(0)=0 \Rightarrow 2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

La solution cherchée est donnée par :

$$\boxed{y = 7/8 \cos 2x + 3/4\, x^2 - 7/8} \quad (03pts)$$