Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2022-2023
1ère Année
MATH1

Examen final

Exercice1 : *(05 pts) Soit la fonction réelle de la variable réelle suivante*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^3 & si\ x \leq 1 \\ \lambda^2 e^{x-1} & si\ x > 1 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda \text{ un paramètre réel}$$

1. *Donner le domaine de définition de la fonction f*
2. *Pour quelles valeurs de λ la fonction f est-elle continue ?*

Exercice2 : *(07 pts)*

I. *Donner le développement limité à l'ordre de 3 en 0 des fonctions suivantes*

1.
$$ln(1 + sinx)$$

2.
$$ln(2e^x + e^{-x})$$

II. *En utilisant un développement limité, calculer la limite suivante :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(chx)^{\frac{1}{x}} - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

Exercice3 : *(08 pts) Soit la suite $(U_n)_n$ définie par*

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = aU_n + b \end{cases} \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ deux réels tels que } a \neq 1$$

1. *Que se passe-t-il si $(a + b) = 1$?*
2. *En supposant que $(a + b) \neq 1$, donner l'expression générale de U_n en fonction de a, b et n*
3. *En supposant que $(a + b) > 1$, calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$*

Année : 2022-2023

Corrigé Examen final

MATH1. L1.GI

Exercice 1 :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^3 & si \quad x \leq 1. \\ \lambda^2 e^{x-1} & si \quad x > 1 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

1- f est définie sur $\mathbb{R}$. $D_f = \mathbb{R}$

on précise aussi que $f(1) = \lambda \cdot 1^3 = \lambda$ Donc $f(1) = \lambda$. 1pt

2- pour $x < 1$ $f(x) = \lambda x^3$ qui est une fonction continue

pour $x > 1$ $f(x) = \lambda^2 e^{x-1}$ qui est aussi une fonction continue

Il suffit d'étudier la continuité au point $x_0 = 1$.

$f(x_0) = f(1) = \lambda$, pour que f soit continue en $x_0 = 1$ il faudrait

avoir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \lambda$. avec $x_0 = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \lambda x^3 = \lambda. \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \lambda^2 e^{1-1} = \lambda^2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lambda \Rightarrow \lambda^2 = \lambda.$$

Pour avoir la continuité au point 1 il ~~est~~ nécessaire d'avoir

$$\lambda^2 = \lambda \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

Donc f est continue ssi $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$

2pts 2pts

Remarque

$\lambda = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$ (fonction constante identiquement nulle)

$$\lambda = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x \leq 1 \\ e^{x-1} & si \quad x > 1. \end{cases}$$

Exercice 2:

I. 1/ $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin x)$

Rappelons que $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

En remarquant que $x \to 0 \Rightarrow \sin x \to 0$ il suffira alors de poser

$X = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)$

On obtient alors: $\ln(1+\sin x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^3$

Ainsi $\ln(1+\sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

02pts

2/ $DL_3(0)$ de $\ln(2e^x + e^{-x})$.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \Rightarrow 2e^x = 2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$.

Donc: $\ln(2e^x + e^{-x}) = \ln\left(3 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)$

le but est de se ramener à la forme usuelle $\ln(1+X)$.

$\ln(2e^x + e^{-x}) = \ln\left(3\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{18} + o(x^3)\right)\right) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{18} + o(x^3)\right)$

$= \ln 3 + \ln(1+X)$ avec $X = \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{18} + o(x^3)$

On applique alors le developpement $\ln(1+X) = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + o(X^3)$

Ce qui donne: $\ln(2e^x + e^{-x}) = \ln 3 + \frac{x}{3} + \frac{4x^2}{9} - \frac{8x^3}{81} + o(x^3)$

02pts

II. $\lim_{x \to 0} \frac{x(\mathrm{Ch}x)^{1/x} - x - x^2/2}{x^3}$ (Déjà traité. revoir corrigé).

$\mathrm{Ch}x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \Rightarrow \ln(\mathrm{Ch}x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

$(\mathrm{Ch}x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\mathrm{Ch}x)} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$.

$\lim_{x \to 0} \frac{x(\mathrm{Ch}x)^{1/x} - x - x^2/2}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + x^2/2 + x^3/8 - x^4/16 + o(x^4)\right) - x - x^2/2}{x^3}$

$= \frac{1}{8}$.

03pts

Exercice 3 : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = aU_n + b \end{cases}$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$.

1/ Si $(a+b) = 1$.

$U_0 = 1$, $U_1 = aU_0 + b = a+b = 1$, $U_2 = aU_1 + b = a+b = 1, \dots, U_n = 1$.

Donc si $(a+b) = 1$; $(U_n)_n$ devient une suite constante : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 1$.

(il aurait fallu démontrer ce résultat par récurrence mais on l'acceptera sans).

1pt

2/ $U_n = aU_{n-1} + b = a(aU_{n-2} + b) + b = a^2 U_{n-2} + ab + b$

$= a^2(aU_{n-3} + b) + ab + b = a^3 U_{n-3} + a^2 b + ab + b$.

On "devine" la formule générale $U_n = a^n U_0 + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + ab + b$.

ou encore $U_n = a^n + b(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) \Rightarrow U_n = a^n + b\dfrac{a^n - 1}{a-1}$

et donc $U_n = \dfrac{a^n(a-1) + b(a^n - 1)}{a-1} \Rightarrow U_n = \dfrac{a^n(a+b-1) - b}{a-1}$

$$U_n = \frac{a^n(a+b-1) - b}{a-1}.$$

03pts

Remarques :

- Posons : $S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ donc $aS = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$

ainsi $aS - S = a^n - 1 \Rightarrow S(a-1) = a^n - 1 \Rightarrow S = \dfrac{a^n - 1}{a-1}$

- Il aurait fallu montrer la formule obtenue $U_n = \dfrac{a^n(a+b-1) - b}{a-1}$

par récurrence mais on l'acceptera sans).

3/ 1er cas : $-1 < a < 1$. $(|a| < 1)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n(a+b-1) - b}{a-1} = \dfrac{-b}{a-1} = \dfrac{b}{1-a}$ Car $|a| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$.

01pts

2ème cas : $a > 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n(a+b-1) - b}{a-1} = +\infty$ Car $a - 1 > 0$, $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$, $a + b - 1 > 0$ (car $(a+b) > 1$)

(02pts)

3ème cas : $a \leq -1$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n =$ n'existe pas

01pts

Car $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n$ n'existe pas dans ce cas