Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2016-2017
1ère Année
Algèbre

Examen final

__Exercice 1__ *: (08 points)* ***I. Soit l'application f définie comme suit :***

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 + 2x + 3$$

1. ***f est-elle injective ?***
2. ***f est-elle surjective ?***

II. Soit l'application g définie comme suit :

$$g : [0, +\infty[\longrightarrow [2, +\infty[$$
$$x \mapsto g(x) = x^2 + 2x + 3$$

1. ***g est-elle injective ?***
2. ***g est-elle surjective ?***

__Exercice 2__ *: (07 points)* ***Soit la matrice*** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. ***Calculer*** $det(A)$
2. ***Calculer*** A^{-1}
3. ***__En déduire__ la solution du système*** $\begin{cases} -x - y + z = 7 \\ y + 2z = 21 \\ 2x + z = 14 \end{cases}$

__Exercice 3__ *: (05 points)* ***Démontrer la proposition suivante***

$$(\forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon) \Rightarrow (x = 0)$$

Algèbre

Corrigé de l'Examen final.

Exercice 1. I. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) = x^2 + 2x + 3$

1. Injective ? Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 + 3 = x_2^2 + 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 = 0$

$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)[x_1 + x_2 + 2] = 0$

$\Rightarrow (x_1 = x_2)$ ou $(x_2 = -x_1 - 2)$.

Soit par exemple $x_1 = 0$ et $x_2 = -x_1 - 2 = -2$ alors

$\left.\begin{array}{l} f(x_1) = f(0) = 3 \\ f(x_2) = f(-2) = 3 \end{array}\right)$ $f(x_1) = f(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$ donc f n'est pas injective.

(2pts)

2. Surjective ? Soit $y \in \mathbb{R}$.

$y = f(x) \Rightarrow y = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 - y = 0$

$\Delta = 4 - 4(3-y) = -8 + 4y = 4(y-2)$

si $y < 2$, $\Delta < 0$ et l'équation $y = f(x)$ ne possède pas de solution réelle.

par exemple $y = 1 = f(x) \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$ $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$

$y = 1$ n'a pas d'antécédent par f, et donc f n'est pas surjective. (2pts)

II. $g : [0, +\infty[\longrightarrow [2, +\infty[$
$x \longmapsto g(x) = x^2 + 2x + 3$.

1. Injective ? Soient $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ ou $(x_2 = -x_1 - 2)$.

Il faut remarquer que $x_1 \geq 0 \Rightarrow -x_1 - 2 \leq -2 < 0$

Comme $x_2 \geq 0$ l'équation $x_2 = -x_1 - 2$ n'est pas réalisable

Donc rejetée, ainsi $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

g est injective.

(2pts)

· Surjective :

Il suffit de remarquer par exemple, que pour $y = 2 \in [2, +\infty[$

$y = g(x) \Rightarrow 2 = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -1 \notin [0, +\infty[$

$y = 2$ n'a pas d'antécédent par g dans $[0, +\infty[$

Donc g n'est pas surjective ! (2 pts)

EXERCICE 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1/ $\det A = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 - 4 = -7$

$\det A = -7$ ($\det A \neq 0$, A est inversible et A^{-1} existe). (1 pt)

2/ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, {}^t\mathrm{Com}(A)$ avec $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = -1/7 \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ +1 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 2/7 & 1/7 \\ -1/7 & -1/7 & 3/7 \\ -4/7 & 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$ (03 pts)

3/ $\begin{cases} -x - y + z = 7 \\ y + 2z = 21 \\ 2x + z = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - x - y = 7 \\ 2z + 0x + y = 21 \\ z + 2x + 0y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 14 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 2/7 & 1/7 \\ -1/7 & -1/7 & 3/7 \\ -4/7 & 3/7 & -2/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$z = 10$; $x = 2$; $y = 1$.

(03 pts)

EXERCICE 3 :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Longrightarrow (x = 0).$$

Nous allons utiliser une démonstration par l'absurde.

Rappelons que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$

et donc $(\overline{p \Rightarrow q}) \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$.

On suppose par l'absurde que :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \text{ et } (x \neq 0).$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est supposé quelconque ; on peut toujours prendre par exemple $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$ ($x \neq 0$, donc $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$).

et dans ce cas $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x| \leq \frac{|x|}{2}$

$\Leftrightarrow 1 \leq 1/2$ (On peut simplifier car $x \neq 0$)

Ce qui est absurde.

D'où le résultat.

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Longrightarrow (x = 0).$$

(05 pts)