Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2021-2022
Master I
Probabilités-Statistiques

Devoir à Rendre le 09 Décembre 2021

<u>Exercice1</u> : (07pts) ***Une usine fabrique des appareils électroménagers, dont 5% sont défectueux. On dispose en sortie d'usine d'un testeur électronique qui allume un voyant vert si l'appareil est fonctionnel et un voyant rouge si l'appareil est défectueux.***

Si l'appareil est fonctionnel, le testeur est fiable avec la probabilité 0.96, et si l'appareil est défectueux, le testeur est fiable avec la probabilité 0.98.

On effectue un test sur un appareil au hasard:

1. Quel est la probabilité que le testeur donne un faux résultat?

2. Quelle est la probabilité qu'un appareil ayant obtenu un voyant vert, soit défectueux ?

<u>Exercice 2</u> : (07 pts) ***Une machine produit des articles dont 3% sont défectueux.***

I. Calculer la probabilité que parmi 112 articles produits il y ait :

1. Deux articles défectueux.

2. Cinq articles défectueux.

II. Calculer les probabilités demandées plus haut, en utilisant une approximation par une loi de Poisson. Cette approximation est-elle justifiée ?

III. Calculer les probabilités demandées plus haut, en utilisant une approximation par une loi normale. Cette approximation est-elle justifiée ?

<u>Qualité de rédaction</u> : (06 pts)

Corrigé Examen final.
MI. Proba-Stat.

Exercice 1: On propose les notations.

F : " le testeur donne un résultat erroné (faux) "

D : " l'appareil électroménager est défectueux "

R : " Voyant rouge allumé "

V : " Voyant vert allumé "

1. Le test est erroné dans deux cas de figure

- Voyant vert allumé <u>et</u> l'appareil électroménager est défectueux.

<u>ou</u>

- Voyant rouge allumé <u>et</u> l'appareil électroménager n'est pas défectueux.

Donc $F = (V \cap D) \cup (R \cap \bar{D})$

Remarquons que $(V \cap D) \cap (R \cap \bar{D}) = V \cap R \cap D \cap \bar{D} = \emptyset$.

Donc la probabilité cherchée est donnée par:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(V \cap D) + P(R \cap \bar{D}) \\ &= P(V/D) \cdot P(D) + P(R/\bar{D}) . P(\bar{D}) \\ &= (1-0{,}98) . 0{,}05 + (1-0{,}96)(1-0{,}05) \\ &= 0{,}039 \end{aligned}$$

2. On cherche $P(D/V)$; on utilise la formule de Bayes.

$$P(D/V) = \frac{P(V/D) . P(D)}{P(V/D) \cdot P(D) + P(\bar{D}) . P(V/\bar{D})}$$

$$= \frac{0{,}05 \times 0{,}02}{0{,}02 \times 0{,}05 + 0{,}95 \times 0{,}96}$$

$$= 0{,}001 .$$

Exercice 2 :

I.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre d'article défectueux parmi 112, la probabilité qu'un article soit défectueux est de 0,03

X suit une loi binômiale $B(112, \; 0{,}03)$; $P(X=k) = C_{112}^{k} (0{,}03)^{k} (0{,}97)^{112-k}$

$$P(X=2) = C_{112}^{2} (0{,}03)^{2} (0{,}97)^{110} = 0{,}1958$$

$$P(X=5) = C_{112}^{5} (0{,}03)^{5} (0{,}97)^{107} = 0{,}125.$$

II. Faisons une approximation par une loi de Poisson $P(\lambda)$; $P(X=k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

$$\lambda = np = 112 \times 0{,}03 = 3{,}36$$

$$P(X=2) = e^{-3{,}36} \frac{(3{,}36)^2}{2!} = 0{,}196$$

$$P(X=5) = e^{-3{,}36} \frac{(3{,}36)^5}{5!} = 0{,}124$$

Cette approximation est justifiée car $p = 0{,}03 < 0{,}1$ et $n = 112 > 50$ d'ailleurs les résultats sont quasi les mêmes que ceux obtenus en I.

III. Faisons une approximation par une loi Normale $N(m, \sigma)$.

$m = np = 3{,}36$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{112(0{,}03)(0{,}97)} = 1{,}8.$

N étant continue, on approxime $X = 2$ par $1{,}5 \leq X \leq 2{,}5$.

- $P(1{,}5 \leq X \leq 2{,}5) = P\left(-1{,}03 \leq \dfrac{X-3{,}36}{1{,}8} \leq -0{,}48\right)$

$$= F(-0{,}48) - F(-1{,}03) = F(1{,}03) - F(0{,}48)$$

$$= 0{,}8485 - 0{,}6844 \quad \text{(de la table de } N(0,1))$$

$$= 0{,}1641.$$

- $P(4{,}5 \leq X \leq 5{,}5) = P\left(0{,}63 \leq \dfrac{X-3{,}36}{1{,}8} \leq 1{,}19\right) = F(1{,}19) - F(0{,}63)$

$$= 0{,}8830 - 0{,}7357 = 0{,}1473$$

Cette approximation n'est pas justifiée car bien que $n = 112 \geq 18$ mais $p < 0{,}1$; Il est nécessaire d'avoir p "non petit" $(p > 0{,}1)$ pour que cette approximation soit justifiée