Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2021-2022
Master I
Probabilités-Statistiques II

Examen Final

Exercice1 : (10pts)

Le tableau suivant donne les notes Y obtenues par des étudiants à un examen d'une matière donnée, et le nombre d'heures X par semestre, qu'ils ont passées sur la plateforme Teams en assistant aux cours en ligne:

X \ Y	$0 \le Y < 5$	$5 \le Y < 10$	$10 \le Y < 15$	$15 \le Y < 20$
0	13	10	0	0
1	2	15	1	0
2	0	2	14	0
3	0	0	12	15
4	0	0	2	14

1. Calculer le coefficient de corrélation entre Y et X. Que pouvez-vous conclure ?
2. Selon cette étude, quelle devra être la note d'un étudiant ayant passé moins de 30 minutes sur Teams à assister au cours de cette matière?

Exercice 2 : (10pts)

Dans une cité donnée, on a recensé le nombre de filles dans des familles ayant exactement 5 enfants et on a obtenu les données suivantes :

Nombre de filles	0	1	2	3	4	5
Nombre de famille	18	56	110	88	40	8

1. En justifiant votre réponse, proposer une loi avec laquelle on pourrait ajuster ces données.
2. En prenant $\alpha = 0.05$, et en utilisant le χ^2, tester l'ajustement par la loi proposée dans la première question.

Table du χ^2

df	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.10	0.45	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.58	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.21	2.37	4.11	6.25	7.82	9.35	11.35	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.54	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.66	23.59

M1 . G.I 2021-2022

Proba-Stats II.

Corrigé type.

Exercice 1.

1. La loi du couple : ici $N = 100$.

X \ Y	2,5	7,5	12,5	17,5	
0	0,13	0,1	0	0	0,23
1	0,02	0,15	0,01	0	0,18
2	0	0,02	0,14	0	0,16
3	0	0	0,12	0,15	0,27
4	0	0	0,02	0,14	0,16
	0,15	0,27	0,29	0,29	

$\overline{X} = \sum_i f_{i\cdot} x_i = 0,23 \times 0 + 0,18 \times 1 + 0,16 \times 2 + 0,27 \times 3 + 0,16 \times 4 = 1,95$

$\overline{Y} = \sum_j f_{\cdot j} y_j = 0,15 \times 2,5 + 0,27 \times 7,5 + 0,29 \times 12,5 + 0,29 \times 17,5 = 11,1.$

$V(X) = \sum_i f_{i\cdot} x_i^2 - \overline{X}^2 = 2,0075$, $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 1,4168$

$V(Y) = \sum_j f_{\cdot j} y_j^2 - \overline{Y}^2 = 27,04$, $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = 5,2$

$Cov(X,Y) = \sum_{i,j} f_{ij} x_i y_j - \overline{X}\,\overline{Y} = 28,275 - 11,1 \times 1,95 = 6,63$

Le coefficient de corrélation $\rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \dfrac{6,63}{1,4168 \times 5,2} = 0,8998$ (05pts)

Comme $\rho \simeq 0,9 > 0,75$ on peut conclure qu'il y'a (forte) corrélation linéaire entre Y et X (02pts)

2. Droite de régression de Y en X $Y = aX + b$.

$a = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \dfrac{6,63}{2,0075} = 3,3$; $b = \overline{Y} - a\overline{X} = 11,1 - 3,3 \times 1,95 = 4,66$

$Y = 3,3X + 4,66.$ (01pt)

$X \leq 30\text{mn} = 0,5 \text{ heure} \Rightarrow Y = 3,3X + 4,66 \leq 3,3 \times 0,5 + 4,66$

$\Rightarrow Y \leq 6,31.$

La note devra être inférieure à 6 (on acceptera aussi inférieure à 6,5) (02pts)

Exercice 2 : Ici $N = \sum n_i = 320$.

1. Un nouveau-né est soit un garçon ou une fille et comme nous n'avons considéré que des famille ayant 5 enfants, cela se répète donc 5 fois. C'est exactement un phénomène qui peut être décrit par une loi binomiale $B(n,p)$ avec $n=5$ et p est à estimer. (02pts)

Une bonne façon d'estime $p = \frac{\overline{X}}{n}$.

$$\overline{X} = \sum_i f_i x_i = \sum \frac{n_i}{N} x_i = \frac{1}{N}\sum n_i x_i = \frac{1}{320}(18\times0+56\times1+110\times2+88\times3+40\times4+8\times5)$$

$$\overline{X} = 2{,}3125$$

$$p = \frac{2{,}3125}{5} \longrightarrow p = 0{,}4625.$$

La loi proposée est $B(5, 0{,}4625)$. (03pts)

2. Calcul des probabilités théoriques.

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_5^k (0{,}4625)^k (0{,}5375)^{5-k} = \frac{5!}{k!(5-k)!}(0{,}4625)^k (0{,}5375)^{5-k}$$

Par exemple $P(X=3) = \frac{5!}{3!\,2!}(0{,}4625)^3(0{,}5375)^2 = 0{,}2858$

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i (obs)	18	56	110	88	40	8
p_i théoriques	0,0449	0,193	0,3322	0,2858	0,123	0,0212
$Np_i = 320p_i$	14,368	61,76	106,304	91,456	39,36	6,784

(02pts)

La condition $Np_i > 5$ est vérifiée (01pt)

$$\chi^2_{cal} = \sum_i \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} = 1{,}942.$$

χ^2_{thq} ici $\alpha = 0{,}05$, d.l $= 6-1-1 = 4$ (on a estimé p).

$\chi^2_4(0{,}05) = 9{,}49$ ainsi $\chi^2_{cal} < \chi^2_{thq}$.

On conclut qu'il est possible d'ajuster les données observées par une loi binomiale $B(5, 0{,}4625)$ au seuil $\alpha = 0{,}05$. (02pts)