Devoir.

Exercice 1 : Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ \dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geq x_0 . \end{cases}$$

où tous les paramètres α, β et x_0 sont supposés strictement positifs.

1- Sous quelle(s) condition(s) f est elle la d.d.p d'une V.A. ?

2- Calculer alors la F.d.r.

3- Calculer $E(X)$, $V(X)$

4- Trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = 0,5$.

que représente t ?

Exercice 2 :

Une information est diffusée dans une population donnée

L'information reçue d'un individu est transmise telle quelle à l'individu suivant avec une probabilité p.

L'information reçue d'un individu est transmise de façon contraire à l'individu suivant avec une probabilité $(1-p)$

On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1 – Trouver une relation entre p_n et p_{n+1}

2 – Donner l'expression de p_n en fonction de p et de n.

3 – Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Que pouvez-vous en conclure ?

Solution Devoir I.

Ex1

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$$

1°/ $f \geq 0$ car tous les paramètres sont supposés positifs.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\beta^{\alpha+1}}{x^{\alpha+1}}\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^\alpha \int_{x_0}^{+\infty} x^{-\alpha-1}\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^\alpha \left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{x_0}^{+\infty} = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^\alpha}{x_0^\alpha} = 1 \quad \Rightarrow \beta = x_0.$$

Donc
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$$

2,5 pt

2°/ $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Si $x < x_0$ $\quad F(x) = 0.$

Si $x > x_0$
$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{t}\right)^{\alpha+1} dt.$$

$$= \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{x} t^{-\alpha-1}\,dt$$

$$= \alpha x_0^\alpha \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{x_0}^{x}$$

$$= 1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ 1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$$

2,5 pt

3/

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{x_0}^{+\infty} x \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} dx.$

$$= \alpha x_0^{\alpha} \int_{x_0}^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \alpha x_0^{\alpha}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x_0}^{+\infty} & \text{si } \alpha \neq 1. \\ \alpha x_0 \left[\ln|x|\right]_{x_0}^{+\infty} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Si $\alpha \leq 1$ l'intégrale diverge ($E(X)$ n'existe pas)

si $\alpha > 1$. $E(X) = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1}$.

2,5 pt

- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Un calcul similaire à celui effectué pour $E(X)$ donne:

Si $\alpha \leq 2$ l'intégrale diverge.

Si $\alpha > 2$ $V(X) = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$.

2,5 pt

4/ $\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = 0,5 \Leftrightarrow P(X \leq t) = 0,5 \Leftrightarrow F(t) = 0,5$

il suffit de remplacer dans la fonction de répartition déjà calculée

$(t > x_0)$ $F(t) = 1 - \left(\frac{x_0}{t}\right)^{\alpha} = 0,5.$

Donc $\left(\frac{x_0}{t}\right)^{\alpha} = 0,5 \Rightarrow \frac{x_0}{t} = (0,5)^{1/\alpha} \Rightarrow t = x_0 \cdot (0,5)^{-1/\alpha}$

$0,5 = 1/2 \Rightarrow (0,5)^{-1/\alpha} = (1/2)^{-1/\alpha} = 2^{1/\alpha}.$

Donc $\boxed{t = x_0 \cdot 2^{1/\alpha}}$

1pt

t est la valeur médiane $P(X \leq t) = 0,5$ elle divise les valeurs prises par la v.a. X en deux $50\% = 0,5$ ont une valeur inférieure à t et $50\% = 0,5$ ont une valeur supérieure à t.

1pt

Exercice 2 :

1/ Notons A_n : " l'information après n transmissions est correcte "

$p_n = P(A_n)$. On cherche une relation entre p_n et $p_{n+1} = P(A_{n+1})$

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n) \cdot P(A_n) + P(A_{n+1}/\bar{A}_n)\, P(\bar{A}_n)$$

(formule des probabilités totales).

$A_{n+1}/A_n \longrightarrow$ l'information est transmise de façon correcte de l'étape n à l'étape n+1.

Donc $P(A_{n+1}/A_n) = p$.

$P(A_{n+1}/A_n) = 1-p$. (l'information est transmise de façon incorrecte)

ainsi $P(A_{n+1}) = p \cdot p_n + (1-p)\cdot(1-p_n)$.

$$\boxed{p_{n+1} = (2p-1)p_n + (1-p)}$$

2,5 pt

2/ Observons que :

$$p_{n+1} - 1/2 = (2p-1)p_n + (1-p) - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + (1/2 - p)$$

$$p_{n+1} - 1/2 = (2p-1)p_n + 1/2(1-2p) = (2p-1)p_n - 1/2(2p-1)$$

$$p_{n+1} - 1/2 = (2p-1)(p_n - 1/2)$$

De proche en proche

$$(p_n - 1/2) = (2p-1)(p_{n-1} - 1/2).$$

$$(p_{n-1} - 1/2) = (2p-1)(p_{n-2} - 1/2)$$

$$\vdots$$

$$(p_1 - 1/2) = (2p-1)(p_0 - 1/2)$$

D'où

$$\left(p_n - \tfrac{1}{2}\right) = (2p-1)^n \left(p_0 - \tfrac{1}{2}\right)$$

mais $p_0 = 1$ (la première transmission est correcte)

Donc $\left(p_n - \tfrac{1}{2}\right) = (2p-1)^n \tfrac{1}{2}$.

ou encore

$$\boxed{p_n = \tfrac{1}{2}(2p-1)^n + \tfrac{1}{2}}$$

2,5 pt

3/

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$ (N'oublions pas que p est une probabilité $0 \leq p \leq 1$).

1er cas : $p = 1$.

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

2ème cas : $p = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}\right)$$

la limite n'existe pas $\begin{cases} p_{2n} = 1 \to 1 \\ p_{2n+1} = 0 \to 0. \end{cases}$

3ème cas $0 < p < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2}$$

(car $-1 < 2p-1 < +1 \Rightarrow (2p-1)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$)

2pts

Interprétation :

- Si $p = 1$ (on transmet l'information correctement) aucun individu ne ment — l'information sera toujours bien transmise
- Si $p = 0$ (chaque individu transmet l'information de façon contraire)

Donc une fois sur deux on aura la bonne information (suite alternée).

- si $p \neq 0$ et $p \neq 1$ On ne peut pas prévoir comment sera transmise l'information à l'∞ $p_\infty = \frac{1}{2}$.

1pt