Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Productique

Année 2014-2015
$1^{ère}$ Année
Analyse

Examen final

Exercice1 : (07 points)

I. Soit la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = \frac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$, et soit la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = \frac{2n-\sqrt{4n^2+1}}{n-\sqrt{n^2+1}}$.

Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} w_n$

II. Soit la suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \frac{2n+1}{3n^2+3} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+n}$

Montrer que $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice2 : (06 points)

Donner l'expression de la dérivée nième de la fonction suivante :

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

où a, b, c et d sont des nombres réels non nuls.

Exercice3 : (07points)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, telle que $f(a) = f(b) = 0$,

et pour tout $x \in]a, b[$ on a $f''(x) \leq 0$. Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \qquad f(x) \geq 0$$

Corrigé Analyse.

Exercice 1 :

I.

- $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+\sqrt{4n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+n\sqrt{4+1/n^2}}{n+n\sqrt{1+1/n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2.$ 1pt

- $w_n = \dfrac{2n-\sqrt{4n^2+1}}{n-\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{(2n-\sqrt{4n^2+1})(2n+\sqrt{4n^2+1})(n+\sqrt{n^2+1})}{(n-\sqrt{n^2+1})(n+\sqrt{n^2+1})(2n+\sqrt{4n^2+1})} = \dfrac{(4n^2-(4n^2+1))(n+\sqrt{n^2+1})}{(n^2-(n^2+1))(2n+\sqrt{4n^2+1})}$

$$= \frac{-(n+\sqrt{n^2+1})}{-(2n+\sqrt{4n^2+1})} = \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{2n+\sqrt{4n^2+1}} = \frac{1}{v_n}$$

Ainsi $w_n = \dfrac{1}{v_n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = 1/2.$ $\lim_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{2}$ 2pts

II. Il suffit de remarquer que :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2n+1}{3n^2+n} &\leq \frac{2n+1}{3n^2+1} \leq \frac{2n+1}{3n^2+1}\\
\frac{2n+1}{3n^2+n} &\leq \frac{2n+1}{3n^2+2} \leq \frac{2n+1}{3n^2+1}\\
\frac{2n+1}{3n^2+n} &\leq \frac{2n+1}{3n^2+3} \leq \frac{2n+1}{3n^2+1}\\
&\vdots\\
\frac{2n+1}{3n^2+n} &\leq \frac{2n+1}{3n^2+n} \leq \frac{2n+1}{3n^2+1}
\end{aligned}\right\}$$

En faisant la somme on obtient :

$$n\cdot\frac{2n+1}{3n^2+n} \leq U_n \leq n\cdot\frac{2n+1}{3n^2+1}$$

2pts

En passant à la limite ; on obtien

$$\frac{2}{3} \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \leq \frac{2}{3}$$

1pt

Par le théorème des trois suites (gendarmes, encadrement), on peut conclure

que $\lim_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{2}{3}$ 1pt

EXERCICE 2 : $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$

$$g'(x) = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2} = (ad-cb)(cx+d)^{-2}$$

- Si $(ad-cb) = 0$ alors $g^{(n)}(x) = 0$ pour $n \geq 1$. 1pt
- Si $(ad-cb) \neq 0$ on peut continuer le calcul.

$$g''(x) = (ad-cb)\left[(-2)\cdot c\,(cx+d)^{-3}\right] = (ad-cb)\left[(-1)2\cdot c\cdot(cx+d)^{-3}\right]$$

$$g'''(x) = (ad-cb)\left[(-1)^2\, 2\times 3\cdot c^2 (cx+d)^{-4}\right]$$

$$g^{(4)}(x) = (ad-cb)\left[(-1)^3\, 2\times 3\times 4\cdot c^3 (cx+d)^{-5}\right]$$

3pts

ainsi, on peut supposer légitimement que

$$g^{(n)}(x) = (ad-cb)\left[(-1)^{n-1}\, n!\, c^{n-1} (cx+d)^{-(n+1)}\right]$$

Formule qu'il est nécessaire de démontrer par récurrence :

Pour $n = 1$ $\quad g'(x) = (ad-cb)(cx+d)^{-2} = (ad-cb)\left[(-1)^{1-1}\, 1!\, c^{1-1} (cx+d)^{-(1+1)}\right]$

formule vérifiée.

On suppose que : $g^{(n)}(x) = (ad-cb)\left[(-1)^{n-1} n!\, c^{n-1} (cx+d)^{-(n+1)}\right]$

Il faut montrer que : $g^{(n+1)}(x) = (ad-cb)\left[(-1)^{n} (n+1)!\, c^{n} (cx+d)^{-(n+2)}\right]$

En effet : $g^{(n+1)}(x) = \left[g^{(n)}(x)\right]' = \left[(ad-cb)\left[(-1)^{n-1} n!\, c^{n-1} (cx+d)^{-(n+1)}\right]\right]'$

$$= (ad-cb)\left[(-1)^{n-1} n!\, c^{n-1} \times (-(n+1)\cdot c\,(cx+d)^{-(n+1)-1}\right]$$

$$= (ad-cb)\left[(-1)^{n} (n+1)!\, c^{n}\cdot (cx+d)^{-(n+2)}\right] \quad \text{cqfd}$$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad g^{(n)}(x) = (ad-cb)\left[(-1)^{n-1} n!\, c^{n-1} (cx+d)^{-(n+1)}\right]$ 2pts

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g^{(n)}(x) = (ad-cb)(-c)^{n-1} n!\,(cx+d)^{-(n+1)}}$$

EXERCICE 3 :

- f est continue sur $[a,b]$ (Car dérivable).

  f est dérivable sur $]a,b[$ (Car dérivable sur $[a,b]$) (dérivable 2 fois)

  $f(a)=f(b)$

  Alors d'après le théorème de Rolle, on peut conclure que

  $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $\underline{f'(c)=0}$

1pt

- D'un autre côté l'hypothèse $\forall x \in]a,b[,\ f''(x) \leqslant 0$, nous indique que f' est décroissante, ce qui nous permet de dire que

Soit $x \in]a,c]$, $x \leq c \Rightarrow f'(x) \geqslant f'(c) \Rightarrow f'(x) \geqslant 0.$

Soit $x \in [c,b[$ $x \geqslant c \Rightarrow f'(x) \leqslant f'(c) \Rightarrow f'(x) \leqslant 0$

3pts

Donc f est croissante sur $]a,c]$ (Car $f'(x) \geqslant 0$)

f est décroissante sur $[c,b[$ (Car $f'(x) \leqslant 0$)

si $x \in]a,c]$ $x \geqslant a \Rightarrow f(x) \geqslant f(a)=0 \Rightarrow f(x) \geqslant 0$

Si $x \in [c,b[$ $x \leqslant b \Rightarrow f(x) \geqslant f(b)=0 \Rightarrow f(x) \geqslant 0$

ainsi $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geqslant 0.$

3pts