Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Productique

Année 2014-2015
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Examen final

Exercice1 : (07points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Calculer A^3
3. En déduire que $(I - A)$ est inversible et en déduire l'expression de $(I - A)^{-1}$
4. Retrouver $(I - A)^{-1}$ par la méthode classique (en utilisant la comatrice).

Exercice2 : (06 points)

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leq n!$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (4^n + 6n - 1)$ est un multiple de 9.

Exercice3 : (07points)

Soit $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications définies par

$$f(x) = 2x \text{ et } g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si\ x\ est\ pair \\ \dfrac{x-1}{2} & si\ x\ est\ impair \end{cases}$$

1. Les applications f et g , sont elles : injectives ? surjectives ?
2. Les applications $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$, sont elles : injectives ? surjectives ?

Corrigé Algèbre

Exercice 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. $\det A = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$ donc A n'est pas inversible. 1pt

2. $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1pt

3. Comme $A^3 = [0]$ on a : $I = I - A^3$

d'un autre côté $I - A^3 = (I - A)(I + A + A^2)$ $\quad (a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab))$

Donc $I = I - A^3 = (I-A)(I+A+A^2)$ ce qui permet de conclure que
$= (I+A+A^2)(I-A)$ $\quad (I-A)$ est inversible et $(I-A)^{-1} = I + A + A^2$

2pts

$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2pts

4. $(I-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(I-A) = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1 \neq 0$ $\quad (I-A)$ est inversible.

Cofacteurs $c_{11} = (-1)^{1+1}4 = 4$, $c_{12} = (-1)^{1+2}5 = -5$, $c_{13} = (-1)^{1+3}2 = 2$

$c_{21} = (-1)^{2+1}(-2) = 2$, $c_{22} = (-1)^{2+2}(-2) = -2$, $c_{23} = (-1)^{2+3}(-1) = 1$.

$c_{31} = (-1)^{3+1}1 = 1$, $c_{32} = (-1)^{3+2}(1) = -1$, $c_{33} = (-1)^{3+3}1 = 1$.

$Com((I-A)) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $(I-A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(I-A)}\, {}^t Com((I-A))$

$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1pt

EXERCICE 2 :

1- Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leq n!$ 0,5 pt

Pour $n=1$ $\quad 2^0 = 1 \leq 1! = 1$ ce qui est vrai

Supposons que $\quad 2^{n-1} \leq n!$ (Hypothèse de récurrence)

Il faut montrer que $2^n \leq (n+1)!$

D'un côté $2^{n-1} \leq n!$ et d'un autre côté $\forall n \geq 1, \quad 2 \leq (n+1)$

Donc $\quad 2^{n-1} \leq n! \Rightarrow 2 \cdot 2^{n-1} \leq (n+1)n! \Rightarrow 2^n \leq (n+1)!$ cqfd.

En conclusion $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2^{n-1} \leq n!$ 2,5 pt

2. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \ (4^n + 6n - 1) = 9k$ (multiple de 9)

Pour $n=0$, $\quad 4^0 + 6 \times 0 - 1 = 0 = 9 \times 0$ ce qui est donc vrai $(k=0)$ 0,5 pt

Supposons que $\quad 4^n + 6n - 1 = 9k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ (Hypothèse de récurrence)

Il faut montrer que : $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k'$ pour un certain $k' \in \mathbb{N}$.

Observons que : $4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4 \times 4^n + 6n + 6 - 1 = 4 \times 4^n + 6n - 1 + 6$

Or par l'hypothèse de récurrence $\quad 4^n + 6n - 1 = 9k \Rightarrow 6n - 1 = 9k - 4^n$.

Donc $\quad 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4 \times 4^n + 9k - 4^n + 6 = 9k + 3 \times 4^n + 6$

Or par l'hypothèse de récurrence $4^n + 6n - 1 = 9k \Rightarrow 4^n = 9k - 6n + 1$

Ainsi $\quad 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 9k + 3(9k - 6n + 1) + 6 = 9k + 27k - 18n + 9$

$$= 9(k + 3k - 2n + 1) = 9k' \quad \text{cqfd.}$$

En conclusion $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4^n + 6n - 1)$ est un multiple de 9. 2,5 pt

Exercice 3 :

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad\qquad g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$x \longmapsto 2x \qquad\qquad x \longmapsto \begin{cases} x/2 & \text{si } x \text{ pair} \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$$

1. • Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ f est injective 0,5pt

- Clairement f n'est pas surjective si y est impair il ne possède pas d'antécédent 0,5pt

En effet, par exemple $y = 3$, $y = f(x) \Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow x = 3/2 \notin \mathbb{N}$

• – Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, x_1 pair, x_2 impair

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2 - 1}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 - 1$$, Donc par exemple

$x_1 = 4$ (pair) $x_2 = 5$ (impair) ; $g(x_1) = \frac{4}{2} = 2$, $g(x_2) = \frac{5-1}{2} = 2$, $g(x_1) = g(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$ 0,5pt

donc g n'est pas injective

– Soit $y \in \mathbb{N}$, $y = g(x) \Rightarrow \begin{cases} y = x/2 & \text{si } x \text{ pair} \\ y = \frac{x-1}{2} & \text{si } x \text{ impair} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y & \text{(pair)} \\ x = 2y+1 & \text{(impair)} \end{cases}$ 0,5pt

Donc $\forall y \in \mathbb{N}$, y possède deux antécédents $x_1 = 2y$ et $x_2 = 2y+1$, donc g est surjective

2. Il faut commencer par noter que $g\circ f$ et $f\circ g$ existent, en effet :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "g"] & \mathbb{N} \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & \mathbb{N} \arrow[r, "f"] & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$ 1pt

• $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{2x}_{\text{pair}}) = \frac{2x}{2} = x$, $(g\circ f)(x) = x$ (l'application identité) 0,5pt

$(g\circ f)$ est injective et surjective (et donc bijective) 1pt

• $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ pair} \\ x-1 & \text{si } x \text{ impair} \end{cases}$ 0,5pt

En reprenant les mêmes contre-exemples que la première question on obtient :

• Soit $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $(f\circ g)(x_1) = (f\circ g)(\underbrace{4}_{\text{pair}}) = 4$, $(f\circ g)(x_2) = (f\circ g)(\underbrace{5}_{\text{impair}}) = 5 - 1 = 4$

$(f\circ g)(x_1) = (f\circ g)(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$, Donc $(f\circ g)$ n'est pas injective 1pt

• Il faut remarquer que $(f\circ g)(x)$ est toujours un nombre pair

Si $y = 3$ alors $y = (f\circ g)(x) \Rightarrow \begin{cases} y = x & \text{si } x \text{ pair} \\ y = x - 1 & \text{si } x \text{ impair} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = x & \text{si } x \text{ pair (impossible)} \\ 4 = x & \text{si } x \text{ impair (impossible)} \end{cases}$

Donc $(f\circ g)$ n'est pas surjective 1pt