Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
Master I
Probabilités-Statistiques

Contrôle

Exercice1 : 08pts

Deux amis se donnent rendez vous dans un lieu précis entre 14h30 et 15h00, ils conviennent que le premier arrivé attendent le deuxième 5 minutes.

Trouver la probabilité p pour que ces deux amis se rencontrent.

Exercice 2 : 12 pts

I. Dans un pays donné la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 165 centimètres, et d'écart-type 6 centimètres.

1. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 centimètres.
2. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 150 et 157 centimètres.
3. Donner la taille maximale des 15% des femmes les plus petites.

II. Dans ce même pays, on considère maintenant la population totale (hommes et femmes), pour les femmes on conserve les mêmes données que celles de la partie I, donc la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 165 centimètres, et d'écart-type 6 centimètres, et la taille des hommes notée Y suit une loi normale d'espérance 174 centimètres et d'écart-type 8 centimètres. Les femmes représentent 51.3% de la population totale (par conséquent les hommes représentent 48.7% de la population totale).

1. On choisit une personne au hasard dans la population totale, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 cm.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne mesurant plus de 170 cm soit une femme ?

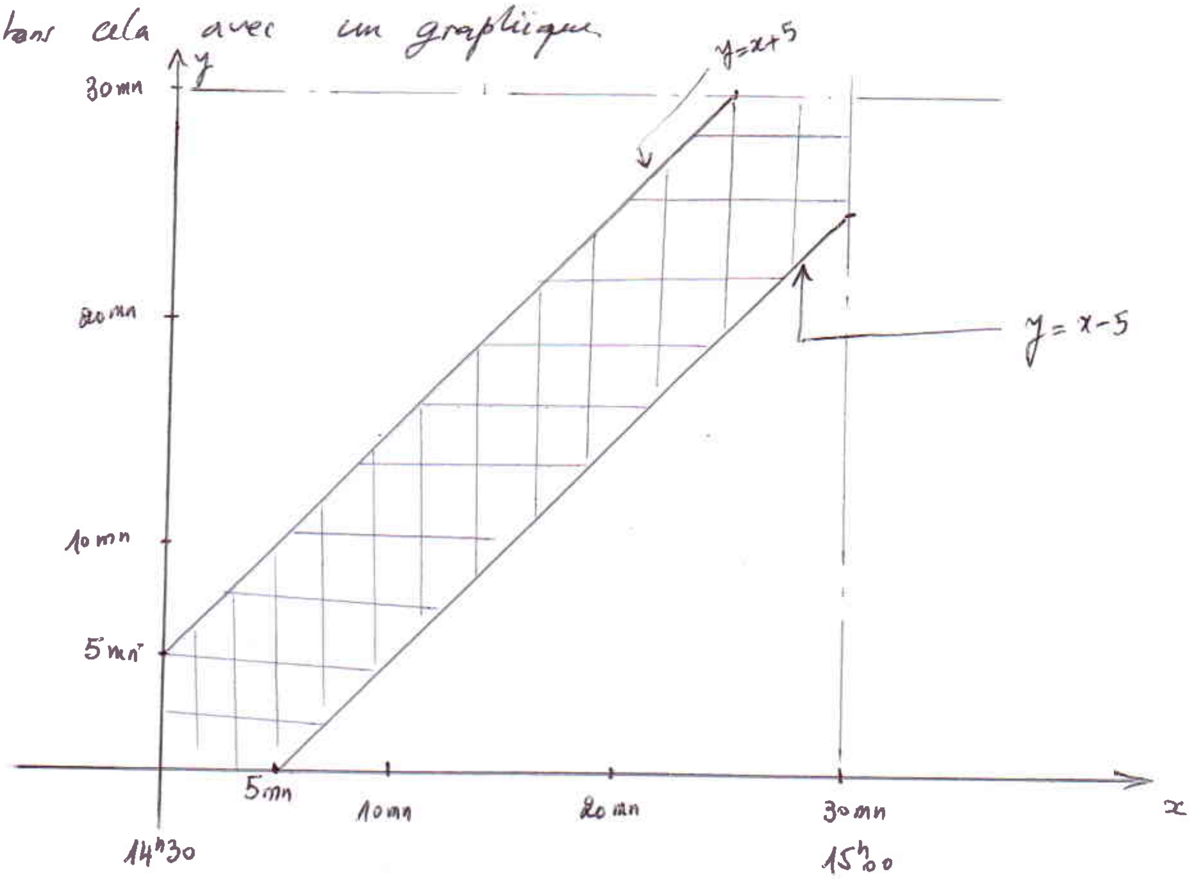
Corrigé contrôle

Exercice 1 :

Entre 14h30 et 15h00 donc sur une durée de 30 min notons x, y les temps d'arrivée des deux amis ; pour qu'ils se rencontrent il faudrait que $|x-y| \leq 5$ donc $-5 \leq y-x \leq +5$ ou encore

$$x-5 \leq y \leq x+5.$$

Représentons cela avec un graphique



La probabilité recherchée correspond à l'aire de la surface hachurée sur l'aire de la surface du carré qui représente l'ensemble fondamental.

aire du carré $= 30 \times 30 = 900$.

aire hachurée $= 30 \times 30 - 2 \dfrac{25 \times 25}{2} = 900 - 625 = 275$.

$$P = \frac{275}{900} = 0{,}30555.$$

Exercice 2 : I. X suit une loi $N(165, 6)$.

1/ $P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P\left(\frac{X-165}{6} \leq \frac{170-165}{6}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{X-165}{6} \leq 0,83\right)$

$= 1 - 0,7967$ ⟶ de la table $N(0,1)$

$= 0,2$

20% des femmes mesurent plus de 170 cm.

2. $P(150 \leq X \leq 157) = P\left(\frac{150-165}{6} \leq \frac{X-165}{6} \leq \frac{157-165}{6}\right)$

$= P\left(-2,5 \leq \frac{X-165}{6} \leq -1,33\right)$

$= F(-1,33) - F(-2,5)$ (F fdr de $N(0,1)$)

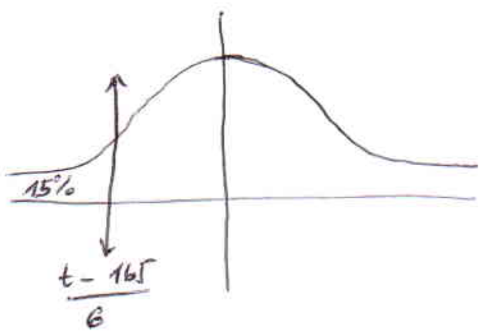
$= F(2,5) - F(1,33)$

$= 0,9938 - 0,9082$ (de la table $N(0,1)$)

$= 0,0856$

3. On cherche la taille t, telle que $P(X \leq t) = 15\% = 0,15$.

Donc $P\left(\frac{X-165}{6} \leq \frac{t-165}{6}\right) = 0,15$



$\frac{t-165}{6}$ est nécessairement négatif

car $0,15 \leq 0,5$.

Donc $1 - P\left(\frac{X-165}{6} \leq \frac{165-t}{6}\right) = 0,15$

par suite $P\left(\frac{X-165}{6} \leq \frac{165-t}{6}\right) = 1 - 0,15 = 0,85$

On trouve de la table $N(0,1)$ de façon inverse que

$\frac{165-t}{6} = 1,04 \Longrightarrow t = 165 - 1,04 \times 6$

$\Longrightarrow t = 158,76 \longrightarrow t \simeq 159$ cm.

Donc les 15% des femmes les plus petites ont une taille maximale de 159 cm.

II. X suit une loi $N(165, 6)$

Y suit une loi $N(174, 8)$.

On note les événements :

A : la taille de la personne dépasse 170 cm.

F : la personne est une femme.

H : la personne est un homme.) partition de la population totale.

$F \cup H = \Omega$, $F \cap H = \emptyset$.

1. On cherche $P(A)$

$P(A) = P(A/F) \cdot P(F) + P(A/H) \cdot P(H)$ (probabilité totale).

$= P(X > 170) \cdot 0{,}513 + P(Y > 170) \cdot 0{,}487$.

1ère question → 0,2 "

$P(Y > 170) = 1 - P(Y \leq 170) = 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq \frac{170 - 174}{8}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq -0{,}5\right)$

$= P\left(\frac{Y-174}{8} \leq 0{,}5\right)$

$= 0{,}6915$ ← de la table $N(0,1)$

$P(A) = 0{,}2 \times 0{,}513 + 0{,}6915 \times 0{,}487 = 0{,}1026 + 0{,}3368 = 0{,}4394$

2.

On cherche $P(F/A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}513\, P(X > 170)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \times 0{,}513}{0{,}4394}$

$P(F/A) = 0{,}4552 \times 0{,}513$

$P(F/A) = 0{,}2335$

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
Master I
Probabilités-Statistiques

Contrôle

Exercice1 : 08 pts

Deux amis se donnent rendez vous dans un lieu précis entre 14h30 et 16h00, ils conviennent que le premier arrivé attendent le deuxième 15 minutes.

Trouver la probabilité p pour que ces deux amis se rencontrent.

Exercice 2 : 12 pts

I. Dans un pays donné la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 155 centimètres, et d'écart-type 7 centimètres.

1. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 centimètres.
2. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 150 et 157 centimètres.
3. Donner la taille maximale des 15% des femmes les plus petites.

II. Dans ce même pays, on considère maintenant la population totale (hommes et femmes), pour les femmes on conserve les mêmes données que celles de la partie I, donc la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 155 centimètres, et d'écart-type 7 centimètres, et la taille des hommes notée Y suit une loi normale d'espérance 174 centimètres et d'écart-type 8 centimètres. Les femmes représentent 51.3% de la population totale (par conséquent les hommes représentent 48.7% de la population totale).

1. On choisit une personne au hasard dans la population totale, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 cm.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne mesurant plus de 170 cm soit une femme ?

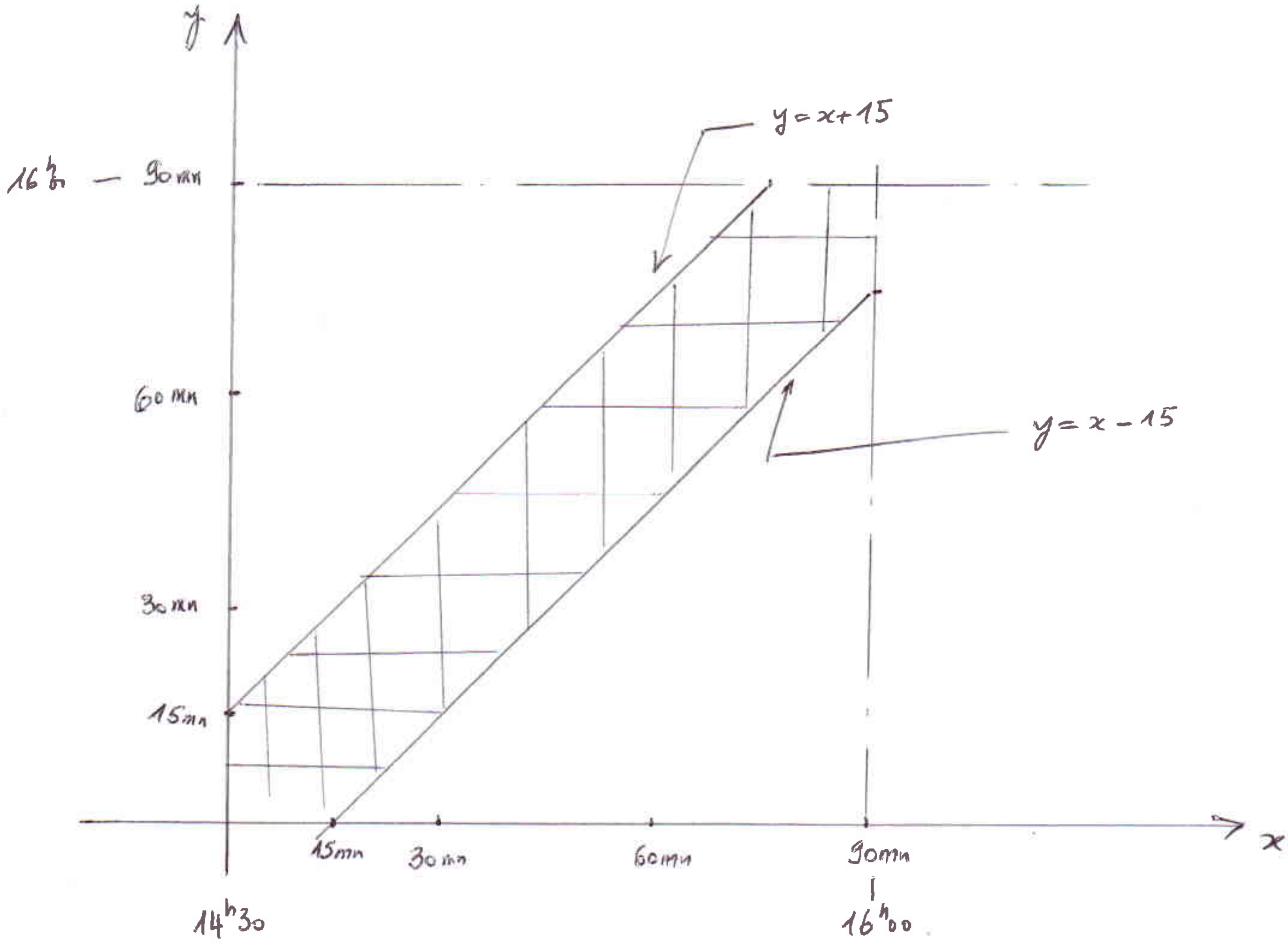
Ex1 :

Entre 14^h30 et 16^h00 donc sur une durée de 90 mn, notons x, y les temps d'arrivés des deux amis ; pour qu'ils se rencontrent il faudrait que :

$$|y-x| \leq 15 \quad \text{donc} \quad -15 \leq y-x \leq 15$$

$$\text{i.e.} \quad x-15 \leq y \leq x+15.$$

Représentons cela avec un graphique.



La probabilité recherchée correspond à l'aire de la surface hachurée sur l'aire de la surface du carré qui représente l'ensemble fondamental.

aire du carré : $90 \times 90 = 90^2 = 8100.$

aire hachurée : $90 \times 90 - 2 \times \frac{75 \times 75}{2} = 8100 - 5625 = 2475$

$$P = \frac{2475}{8100} = 0{,}3055$$

Ex2 : I. X suit une loi $\mathcal{N}(155, 7)$.

1/ $P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P\left(\frac{X-155}{7} \leq \frac{170-155}{7}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{X-155}{7} \leq 2{,}14\right)$

$= 1 - 0{,}9838 \longrightarrow$ de la table $N(0,1)$.

$= 0{,}0162$

2/ $P(150 \leq X \leq 157) = P\left(\frac{150-155}{7} \leq \frac{X-155}{7} \leq \frac{157-155}{7}\right)$

$= P\left(-0{,}71 \leq \frac{X-155}{7} \leq 0{,}29\right)$

$= F(0{,}29) - F(-0{,}71)$ (F fdr de $N(0,1)$)

$= F(0{,}29) - (1 - F(0{,}71))$

$= F(0{,}71) + F(0{,}29) - 1.$

$= 0{,}7611 + 0{,}6141 - 1 \longrightarrow$ (de la table $N(0,1)$)

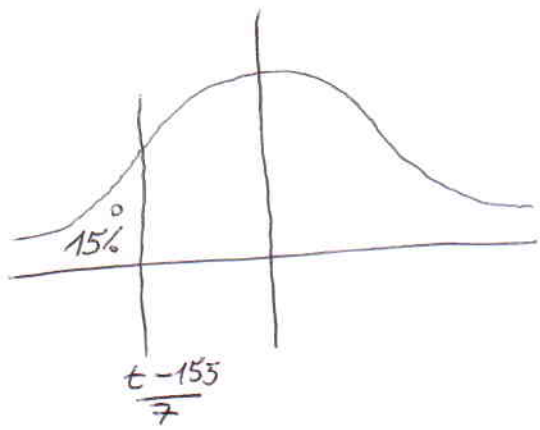
$= 0{,}3752.$

3/ On cherche la taille t telle que $P(X \leq t) = 15\% = 0{,}15$.

Donc $P\left(\frac{X-155}{7} \leq \frac{t-155}{7}\right) = 0{,}15$

$\frac{t-155}{7}$ est nécessairement négatif

Car $0{,}15 \leq 0{,}5$.



Donc $1 - P\left(\frac{X-155}{7} \leq \frac{155-t}{7}\right) = 0{,}15$

Par suite $P\left(\frac{X-155}{7} \leq \frac{155-t}{7}\right) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85.$

On trouve de la table de $N(0,1)$ de façon inverse que :

$\frac{155-t}{7} = 1{,}04 \Rightarrow t = 155 - (7 \times 1{,}04)$

$\Rightarrow t = 147{,}72 \Rightarrow t \simeq 148\,\text{cm}$

Donc les 15% des femmes les plus petites ont une taille maximale de 148 cm

II. X suit une loi $\mathcal{N}(155, 7)$

Y suit une loi $\mathcal{N}(174, 8)$

On note les événements :

A : la taille de la personne dépasse 170 cm

F : la personne est une femme

H : la personne est un homme

partition de la population totale $F \cup H = \Omega$ $F \cap H = \emptyset$.

1. On cherche $P(A)$

$$P(A) = P(A/F) \cdot P(F) + P(A/H) \cdot P(H)$$ (probabilités totales)

$$= P(X > 170) \cdot 0{,}513 + P(Y > 170)\; 0.487$$

1ère question

$$P(Y > 170) = 1 - P(Y \leq 170) = 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq \frac{170-174}{8}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq -0{,}5\right)$$

$$= P\left(\frac{Y-174}{8} \leq 0{,}5\right)$$

$$= 0{,}6915$$ ← de la table $\mathcal{N}(0,1)$

$$P(A) = 0{,}0162 \times 0{,}513 + 0{,}6915 \times 0{,}487 = 0{,}008 + 0{,}3368 = 0{,}3451.$$

2. On cherche $P(F/A) = \dfrac{P(F \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/F) \cdot P(F)}{P(A)}$

$$= \frac{P(X > 170) \cdot 0{,}513}{0{,}3451} = \frac{0{,}0162 \times 0{,}513}{0{,}3451}$$

$$= \frac{0{,}008}{0{,}3451}$$

$$P(F/A) = 0{,}023.$$

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2017-2018
Master I
Probabilités-Statistiques

Contrôle

<u>Exercice1</u> : 08 pts

Deux amis se donnent rendez vous dans un lieu précis entre 14h00 et 16h00, ils conviennent que le premier arrivé attendent le deuxième 25 minutes.

Trouver la probabilité p pour que ces deux amis se rencontrent.

<u>Exercice 2</u> : 12 pts

I. Dans un pays donné la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 160 centimètres, et d'écart-type 5 centimètres.

1. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 centimètres.

2. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 150 et 157 centimètres.

3. Donner la taille maximale des 15% des femmes les plus petites.

II. Dans ce même pays, on considère maintenant la population totale (hommes et femmes), pour les femmes on conserve les mêmes données que celles de la partie I, donc la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 160 centimètres, et d'écart-type 5 centimètres, et la taille des hommes notée Y suit une loi normale d'espérance 174 centimètres et d'écart-type 8 centimètres. Les femmes représentent 51.3% de la population totale (par conséquent les hommes représentent 48.7% de la population totale).

1. On choisit une personne au hasard dans la population totale, calculer la probabilité que sa taille dépasse 170 cm.

2. Quelle est la probabilité qu'une personne mesurant plus de 170 cm soit une femme ?

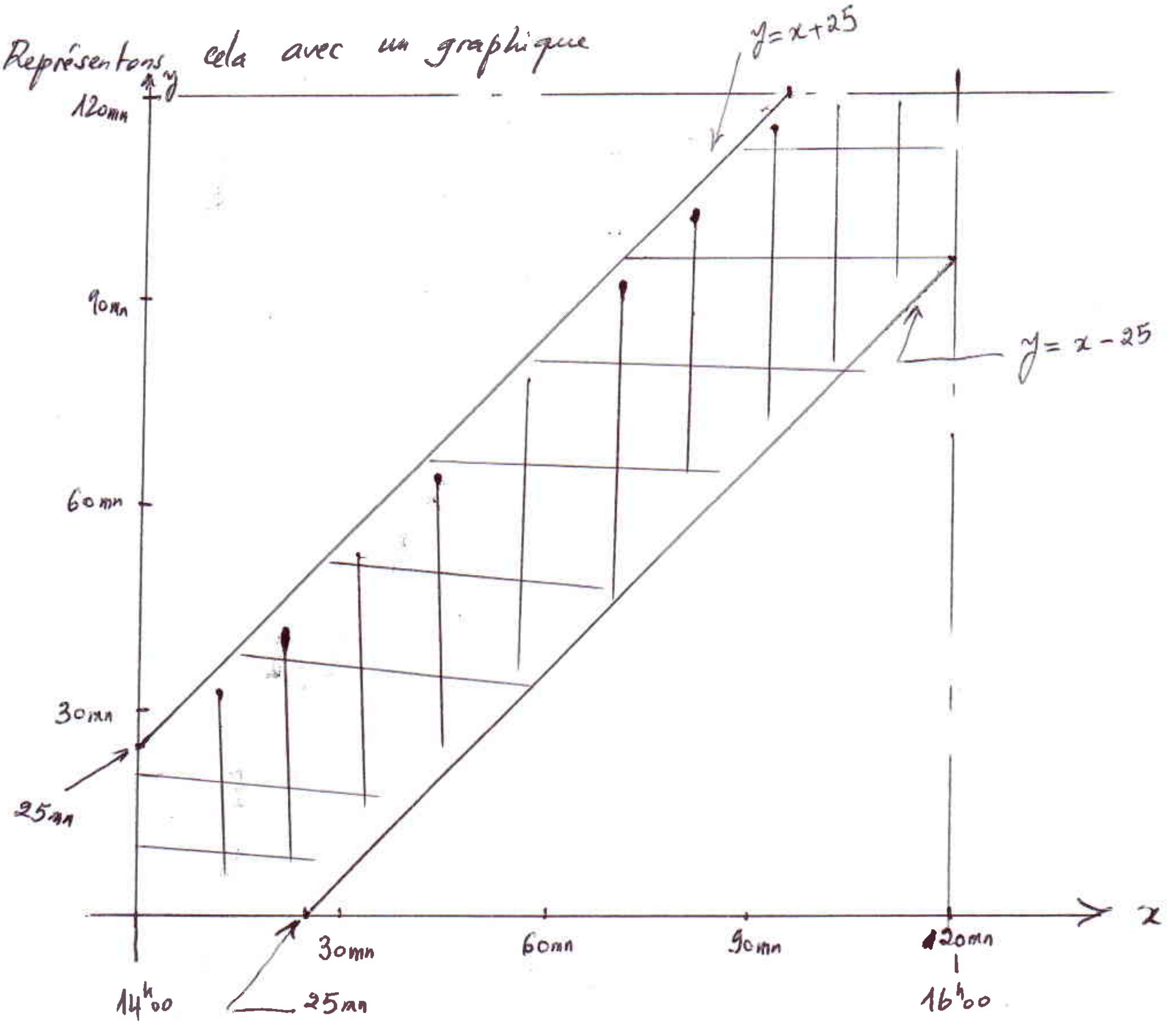
Corrigé Contrôle.

Exercice 1 :

Entre 14^h00 et 16^h00 donc sur une durée de 120 minuts, notons x, y les temps d'arrivées des deux amis, pour qu'ils se rencontrent il faudrait que l'on ait : $|y-x| \leq 25$ donc $-25 \leq y-x \leq +25$.

i.e. $x-25 \leq y \leq x+25$

Représentons cela avec un graphique



La probabilité recherchée correspond à l'aire de la surface hachurée sur l'aire du carré qui représente l'ensemble fondamental.

aire du carré $= 120 \times 120 = 120^2 = 14400$

aire hachurée $= 120^2 - 2 \times \frac{95 \times 95}{2} = 120^2 - 95^2 = 14400 - 9025 = 5375$

$$P = \frac{5375}{14400} = 0,3733$$

Exercice 2 : I. X suit une loi $N(160, 5)$

1/ $P(X > 170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{170-160}{5}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq 2\right)$

$= 1 - 0{,}9772$ ← de la table $N(0,1)$.

$= 0{,}022$

2. $P(150 \leq X \leq 157) = P\left(\frac{150-160}{5} \leq \frac{X-160}{5} \leq \frac{157-160}{5}\right)$

$= P\left(-2 \leq \frac{X-160}{5} \leq -0{,}6\right)$

$= F(-0{,}6) - F(-2)$ (F fdr de $N(0,1)$)

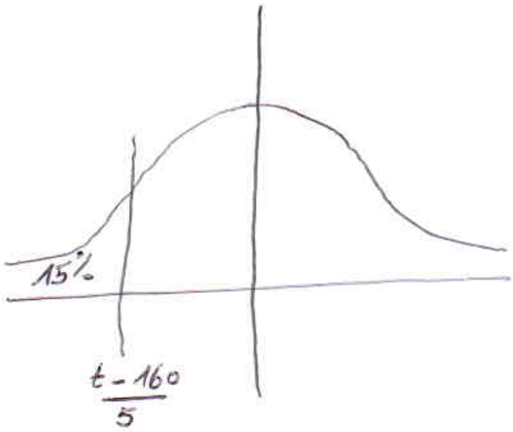
$= F(2) - F(0{,}6)$

$= 0{,}9772 - 0{,}7257$ (de la table $N(0,1)$)

$= 0{,}2515$

3. On cherche la taille t telle que $P(X \leq t) = 15\% = 0{,}15$.

Donc $P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{t-160}{5}\right) = 0{,}15$.



$\frac{t-160}{5}$ est nécessairement négatif

Car $0{,}15 \leq 0{,}5$

Donc $1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{160-t}{5}\right) = 0{,}15$

par suite $P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{160-t}{5}\right) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$

On trouve de la table $N(0,1)$ de façon inverse que :

$\frac{160-t}{5} = 1{,}04 \Rightarrow t = 160 - 1{,}04 \times 5$

$\Rightarrow t = 154{,}8 \Rightarrow t \simeq 155\,cm$

Donc les 15 % des femmes les plus petites ont une taille maximale de 155 cm

II. X suit une loi $N(160, 5)$

Y suit une loi $N(174, 8)$

On note les évènements

A : la taille de la personne dépasse 170 cm

F : la personne est une femme

H : la personne est un homme

partition de la population totale $F \cup H = \Omega$, $F \cap H = \phi$

1. On cherche $P(A)$.

$$P(A) = P(A/F).P(F) + P(A/H).P(H).$$

$$= P(X > 170).0{,}513 + P(Y > 170) \cdot 0{,}487$$

1ère question

$$P(Y > 170) = 1 - P(Y \leq 170) = 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq \frac{170-174}{8}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq -0{,}5\right)$$

$$= P\left(\frac{Y-174}{8} \leq 0{,}5\right)$$

$$= 0{,}6915 \longleftarrow \text{de la table } N(0,1)$$

$$P(A) = 0{,}022 \times 0{,}513 + 0{,}6915 \times 0{,}487 = 0{,}0113 + 0{,}3368 = 0{,}3480$$

2. On cherche $P(F/A) = \dfrac{P(F \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/F).P(F)}{P(A)} = \dfrac{P(X > 170) \times 0{,}513}{0{,}348}$

$$= \frac{0{,}022 \times 0{,}513}{0{,}348}$$

$$= \frac{0{,}0113}{0{,}348}$$

$$= 0{,}032$$