Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen — **Année 2013-2014**

Faculté de Technologie — **1ère Année**

Spécialité Productique — **Algèbre**

Rattrapage

***Exercice 1** : (05 pts)*

Soit l'application f définie comme suit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}: \mathbb{R} &\longrightarrow [\mathbf{3}, +\infty[\\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}+\mathbf{3}| + \mathbf{5} \end{aligned}$$

1. ***f est-elle injective ?***
2. ***f est-elle surjective ?***

***Exercice 2** : (05 pts)*

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n^3 + 5n)$ est divisible par 6.

***Exercice 3** : (10 pts)*

Soit A une matrice carrée telle que $A^{2014} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} = [0]$ ***(la matrice nulle)***

Montrer que $(I - A)$ est inversible ; où I est la matrice Identité et donner l'expression de $(I - A)^{-1}$.

Rattrapage Algèbre

Corrigé :

Exercice 1 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow [3, +\infty[$

$x \longmapsto f(x) = |x+3| + 5.$

1/ f n'est pas injective ; il suffit de remarquer par exemple que pour $x_1 = 0$ et $x_2 = -6$ on a $f(x_1) = f(0) = 8$ et $f(x_2) = f(-6) = 8$

$f(x_1) = f(x_2)$ mais $x_1 \neq x_2$. f n'est pas injective. 0,25

2/ f n'est pas surjective ; il suffit de remarquer par exemple que pour $y = 4 \in [3, +\infty[$; l'équation $y = f(x)$ donne $4 = |x+3| + 5$ i.e

$|x+3| = -1$ ce qui est impossible. donc f n'est pas surjective. 0,25

Exercice 2 : il faut montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $(n^3 + 5n) = 6k$ $(k \in \mathbb{N})$

Pour $n = 0$ $n^3 + 5n = 0 = 6.0$ vérifiée 01

On suppose que $(n^3 + 5n) = 6k$; il faut montrer que

$((n+1)^3 + 5(n+1)) = 6k'$ 01

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = (n^3 + 5n) + 6 + 3n^2 + 3n$$

$$= 6k + 6 + 3n(n+1) \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)}$$

Analysons le terme $3n(n+1)$; de deux choses l'une ; soit que n est pair et dans ce cas $3n(n+1) = 3.2.\ell(n+1) = 6\ell'$; ou que n est impair et dans ce cas $3n(n+1) = 3n(2\ell+1+1) = 6\ell''$; dans les deux cas

$3n(n+1) = 6m$ donc

$(n+1)^3 + 5(n+1) = 6k + 6 + 6m = 6k'$ cqfd 03

Exercice 3 : (10 pts)

$$A^{2014} = [0]$$

Il faut observer que l'on a :

$$(I^n - A^n) = (I - A)(I^{n-1} + I^{n-2} \cdot A + I^{n-3} A^2 + \cdots + A^{n-1})$$

Prenons $n = 2014$; et comme $I^k = I$ (matrice identité).

on obtient alors :

$$(I - \underset{[0]}{\underset{\shortparallel}{A^{2014}}}) = I = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{2013})$$

Ainsi $(I - A)$ est inversible et $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{2013}$