Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2021-2022
1ère Année
Outils Mathématiques

Examen de Rattrapage

***Exercice1:** (10pts)*

Soient a, b, c trois réels non nuls donnés

1. *Donner le développement de Taylor MacLaurin à l'ordre 3 de la fonction suivante*

$$f(x) = ln(1 + ax) + sin(bx) + cx^2$$

2. *Si*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \quad et \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 4$$

Trouver alors les valeurs de a, b et c.

***Exercice2:** (10pts)*

Calculer ce qui suit :

1.

$$\int_0^{\pi} x\sqrt{1 - cos(2x)}\, dx$$

2.

$$\int \frac{1}{\frac{1}{2} + sin^2(x)} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{2} + sin^2(x)} dx$$

Corrigé

Exercice1:

1°)

$$f(x) = ax - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{3} + o(x^3) + bx - \frac{b^3x^3}{6} + o(x^3) + cx^2$$

$$= (a+b)x + \left(c - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{2a^3 - b^3}{6}x^3 + o(x^3)$$

4pts

2°)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 0 \quad et \quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = 4$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+b)x + \left(c - \frac{a^2}{2}\right)x^2 + \frac{2a^3-b^3}{6}x^3 + o(x^3)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{a+b}{x} + c - \frac{a^2}{2} + \frac{2a^3-b^3}{6}x + o(x)\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a+b}{x^2} + \frac{c - \frac{a^2}{2}}{x} + \frac{2a^3-b^3}{6} + o(1)\right) = 4$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c - \frac{a^2}{2} = 0 \\ \frac{2a^3-b^3}{6} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ c = \frac{a^2}{2} \\ \frac{3a^3}{6} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \\ a=2 \end{cases}$$

6pts

Exercice2:

1.

$$\int_0^{\pi} x\sqrt{1-\cos(2x)}\,dx = \int_0^{\pi} x\sqrt{2\sin^2(x)}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} x|\sin(x)|dx$$

Comme $x \in [0,\pi]$, $\sin(x) \geq 0$ donc $|\sin(x)| = \sin(x)$

$$\int_0^{\pi} x\sqrt{1-\cos(2x)}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$$

Faisons une intégration par partie

$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$	
$u'(x) = \sin(x)$	$u(x) = -\cos(x)$
$v(x) = x$	$v'(x) = 1$
$\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx) = [-x\cos(x)]_0^{\pi} -$	$\int_0^{\pi}(-\cos(x))dx$

Donc

$$\int_0^{\pi} x\sqrt{1-\cos(2x)}\,dx =$$

$$\sqrt{2}\left([-x\cos(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(x)\,dx\right) = \sqrt{2}(-\pi\cos(\pi) + [\sin(x)]_0^{\pi}) = \pi\sqrt{2}$$ 3,5 pts

2.

Première méthode

$$F(x) = \int \frac{dx}{\frac{1}{2}+\sin^2(x)} = \int \frac{1}{\frac{1}{2\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}\frac{dx}{\cos^2(x)} = \int \frac{1}{\frac{1}{2}(1+\tan^2(x)) + \tan^2(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\tan^2(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)}$$

On fait le changement de variable $t = \tan(x)$

$$F(x) = \int \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t^2}dt = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\frac{1}{3}+t^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}t) + K = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\arctan(x)) + K$$

Deuxième méthode

$x = \arctan(t)$ entraine que $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Donc

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\sin^2(x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1-\cos^2(x)} = \frac{1}{\frac{3}{2}-\cos^2(x)} = \frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{1+\tan^2(x)}} = \frac{1+\tan^2(x)}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\tan^2(x)-1} = \frac{1+\tan^2(x)}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\tan^2(x)}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1+t^2}{\frac{1}{3}+t^2}$$

Par conséquent

$$F(x) = \frac{2}{3}\int \frac{1+t^2}{\frac{1}{3}+t^2}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\frac{1}{3}+t^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\frac{1}{3}+t^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}t) + K$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\arctan(x)) + K$$ 3,5 Pts

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\frac{1}{2}+\sin^2(x)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\arctan(0)) = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{3}$$

3 pts