- Corrigé de l'Examen. -

Exercice 1:

1. $M.N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2pts)

2. Première méthode: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 3 + 1\times(-2) + 0 = 4.$ (2pts)

Deuxième méthode: On remarque que $A = M.N$; donc $\det(A) = \det(M).\det(N)$

or M et N sont des matrices triangulaires: $\det M = 1\times 1\times 1 = 1$, $\det(N) = 2\times \frac{3}{2}\times\frac{4}{3} = 4$

Donc $\det(A) = \det(M).\det(N) = 1\times 4 = 4.$

3. $\det A = 4 \neq 0$ donc A^{-1} existe ; $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t Com(A)$ (2pts)

Cofacteurs: $c_{11} = 3$, $c_{12} = 2$, $c_{13} = 1$, $c_{21} = 2$, $c_{22} = 4$, $c_{23} = 2$

$c_{31} = 1$, $c_{32} = 2$, $c_{33} = 3$.

$Com(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$ (2pts)

4. $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ y - 2z = 16 \\ 2x - y = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 12 \\ -x + 2y - z = -4 \\ -y + 2z = -16 \end{cases} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix}$

$x = 3/4\times 12 + 1/2(-4) + 1/4(-16) \Longrightarrow x = 3$

$y = 1/2\times 12 + 1\times(-4) + 1/2\times(-16) \Longrightarrow y = -6$

$z = 1/4\times 12 + 1/2(-4) + 3/4(-16) \Longrightarrow z = -11$

(2pts)

EXERCICE 2 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = |x-2| + 2x$.

$$f(x) = |x-2| + 2x = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

1. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

1er cas : $x_1 \leq 2$ et $x_2 \leq 2$ — $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

2ème cas : $x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 2$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

3ème cas : $x_1 \geq 2$ et $x_2 \leq 2$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_2 = 3x_1 - 4$.

il est impossible d'avoir $x_2 = 3x_1 - 4$; en effet $x_1 \geq 2 \Rightarrow 3x_1 - 4 \geq 2$ et $x_2 \leq 2$.

4ème cas : $x_1 \leq 2$ et $x_2 \geq 2$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 2 = 3x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = 3x_2 - 4$

Comme pour le 3ème cas la dernière équation est impossible.

En conclusion $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ donc f est injective. (2pts)

2. Soit $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3x-2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

On remarque que : $\begin{cases} x \leq 2 \Rightarrow x+2 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4. \\ x \geq 2 \Rightarrow 3x-2 \geq 4 \Rightarrow y \geq 4. \end{cases}$

Donc si $y < 4 \Rightarrow y = x+2 \Rightarrow x = y-2$. $(x \leq 2)$

si $y \geq 4 \Rightarrow y = 3x-2 \Rightarrow x = \dfrac{y+2}{3}$ $(x \geq 2)$

Donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = y-2 & \text{si } y \leq 4 \\ x = \dfrac{y+2}{3} & \text{si } y \geq 4 \end{cases}$; tel que $y = f(x)$.

Donc f est surjective. (2pts)

3. $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = |f(x)-2| + 2f(x) = \big||x-2|+2x-2\big| + 2\big(|x-2|+2x\big).$

$$= \begin{cases} |x| + 2(x+2) & \text{si } x \leq 2 \\ |3x-4| + 2(3x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} -x + 2(x+2) & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2(x+2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (3x-4) + 2(3x-2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x+4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 9x-8 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

(03 pts)

Remarque : Il existe une autre méthode qui consiste à procéder comme suit :

$$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(x)+2 & \text{si } f(x) \leq 2 \\ 3f(x)-2 & \text{si } f(x) \geq 2. \end{cases} = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x+4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 9x-8 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

4. D'après la première question ; f est injective et surjective

Donc f est bijective.

f bijective $\Longrightarrow$ $f\circ f$ est bijective (03pts)

Remarque : Il existe une autre méthode (plus longue) qui consiste à montrer que $(f\circ f)$ est injective et surjective.

Dans ce cas $(f\circ f)$ injective —— (01,5 pt)

$(f\circ f)$ surjective —— (01,5 pt)

ou