Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
1ère Année MI
Algèbre II

Examen de rattrapage

Exercice 1 : (08 pts)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et soit $f: E \to F$ une application linéaire .

On rappelle que le noyau de f est l'ensemble : $Kerf = \{X \in E; f(X) = 0_F\}$.

Montrer que :

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow kerf = \{0_E\}$$

Exercice 2 : (04 pts)

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 4 : (08 pts)

Soient les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - 3z = 0\}$ et $E_2 = \{(x, \alpha x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ où α est un paramètre réel.

1. Donner une base de E_1 et une base de E_2 ; et en déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre α a-t-on : $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$?

– Algèbre II –

Corrigé de l'Examen de Rattrapage

Exercice 1:

f est injective $\iff \ker f = \{0_E\}$.

"$\Longrightarrow$" Hypothèse : f injective ; il faut montrer que $\ker f = \{0_E\}$.

- Commençons par observer que : $f(0_E) = 0_F$ car f linéaire. 1pt
  donc $\{0_E\} \subset \ker f$; reste à montrer que $\ker f \subset \{0_E\}$.
- Soit $x \in \ker f \underset{1pt}{\Longrightarrow} f(x) = 0_F \underset{1pt}{\Longrightarrow} f(x) = f(0_E)$
  $\underset{1pt}{\Longrightarrow} x = 0_E$ car f est injective.

donc $\ker f \subset \{0_E\}$

on a ainsi montré la double inclusion et donc $\ker f = \{0_E\}$.

"$\Longleftarrow$" Hypothèse : $\ker f = \{0_E\}$; il faut montrer que f est injective.

Soit $x_1, x_2 \in E$.

$f(x_1) = f(x_2) \underset{1pt}{\Longrightarrow} f(x_1) - f(x_2) = 0_F \underset{1pt}{\Longrightarrow} f(x_1 - x_2) = 0_F$ (car f linéaire)

$\underset{1pt}{\Longrightarrow} (x_1 - x_2) \in \ker f$

or par hypothèse $\ker f = \{0_E\} \underset{1pt}{\Longrightarrow} x_1 - x_2 = 0_E \Longrightarrow x_1 = x_2$.

et donc f est injective.

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 1 \neq 0$; donc A est inversible et A^{-1} existe 1pt

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\, {}^t(\mathrm{Com}\,A)$ 1pt $\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2pts

EXERCICE 3 :

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-3z=0\} = \{(x, 3z-x, z);\ x, z \in \mathbb{R}\}$.

$E_2 = \{(x, \alpha x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre ~~réel~~

1. • Soit $X \in E_1 \Rightarrow X = (x, 3z-x, z) = x(1,-1,0) + z(0,3,1)$.

Donc $\{(1,-1,0), (0,3,1)\}$ est un famille génératrice. de plus soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(0,3,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\{(1,-1,0), (0,3,1)\}$ est donc libre. d'où $\{(1,-1,0), (0,3,1)\}$ est une base (1pt)

(Remarque : rappelons que la base n'est pas unique, on peut trouver d'autres bases) donc $\dim E_1 = 2$ (1pt)

• Soit $X \in E_2 \Rightarrow X = (x, \alpha x, x) = x(1, \alpha, 1)$

Donc $\{(1,\alpha,1)\}$ est une famille génératrice de E_2, comme tout vecteur non nul est toujours libre $\{(1,\alpha,1)\}$ est une base de E_2 $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ (1pt)

par suite $\dim E_2 = 1$ (1pt)

2. Comme $\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.
$= 2+1 - \dim(E_1 \cap E_2) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(E_1 \cap E_2)$

il suffit que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ i.e $\dim(E_1 \cap E_2) = 0$ pour que $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$.

Soit $X \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow X \in E_1$ et $X \in E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+y-3z=0 \\ y = \alpha x \\ z = x \end{cases}$
$X = (x,y,z)$

$\Rightarrow \begin{cases} x + \alpha x - 3x = 0 \\ y = \alpha x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha-2)x = 0 \\ y = \alpha x \\ z = x \end{cases}$.

1er cas si $\alpha \neq 2$ alors $x = y = z = 0 \Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$ (2pts)

2ème cas si $\alpha = 2$ $\quad E_2 = \{(x, 2x, x)\ x \in \mathbb{R}\} \subset E_1$ donc $E_1 \cap E_2 = E_2$
et dans ce cas E_1 et E_2 ne sont pas supplémentaires (2pts)