Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
1ère Année MI
Algèbre II

Examen de rattrapage

Exercice 1 : (07 points)

Soient les ensembles suivants :

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - 3z = 0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(x, \alpha x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$$ où α est un paramètre réel.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de E_1 et une base de E_2 ; puis déduire $dim\, E_1$ et $dim\, E_2$.
3. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre α a-t-on : $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$?

Exercice 2 : (06 points)

Soit l'application linéaire suivante :

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x + y, x + y, x + y + z)$$

1. Déterminer kerf le noyau de f et en déduire dim(kerf).
2. f est-elle injective ? f est elle-surjective ? f est-elle bijective ?
3. Donner dim(Imf) ; puis donner une base de Imf.

Exercice 3 : (07 points)

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(M^3 + 2M^2 - M)$.
2. En utilisant ce qui précède ; montrer que M est inversible et donner M^{-1}.

Corrigé de l'examen de Rattrapage
Algèbre II.

Exercice 1 : $E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y-3z=0\}$, $E_2=\{(x,\alpha x,x)\in\mathbb{R}^3,\ x\in\mathbb{R}\}$ $\alpha\in\mathbb{R}$.

1°/ $E_1 \underset{sev}{\subseteq} \mathbb{R}^3$: car $\bullet\ E_1\neq\emptyset$ $(0,0,0),(1,2,1)\ldots\in\mathbb{R}^3$

• Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $X=(x,3z-x,z)\in E_1$, $Y=(x',3z'-x',z')\in E_1$

$\lambda X+\mu Y=(\lambda x+\mu x',\ \lambda(3z-x)+\mu(3z'-x'),\ \lambda z+\mu z')$

$=(\lambda x+\mu x',\ 3(\lambda z+\mu z')-(\lambda x+\mu x'),\ \lambda z+\mu z')\in E_1$. 1pt

$E_2 \underset{sev}{\subseteq} \mathbb{R}^3$, $\bullet\ E_2\neq\emptyset$ $(0,0,0),\ (1,\alpha,1)\cdots\in E_2$.

• Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $X=(x,\alpha x,x)\in E_2$ et $Y=(x',\alpha x',x')\in E_2$. 1pt

$\lambda X+\mu Y=(\lambda x+\mu x',\ \lambda\alpha x+\mu\alpha x',\ \lambda x+\mu x')=(\lambda x+\mu x',\ \alpha(\lambda x+\mu x'),\ \lambda x+\mu x')\in E_2$

2°/ . il est facil de montrer que $\{(1,-1,0),(0,3,1)\}$ est une base de E_1 et que $\{(1,\alpha,1)\}$ est une base de E_2 donc $\dim E_1=2$ et $\dim E_2=1$ 2pts

3°/ $\dim(E_1+E_2)=\dim E_1+\dim E_2-\dim(E_1\cap E_2)=2+1-\dim(E_1\cap E_2)$

$=3-\dim(E_1\cap E_2)$

Donc pour avoir $\mathbb{R}^3=E_1\oplus E_2$ il suffit d'avoir $E_1\cap E_2\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Soit $X\in E_1\cap E_2$, $X=(x,y,z)$ $\Rightarrow X\in E_1$ et $X\in E_2$ $\Rightarrow \begin{cases}x+y-3z=0\\ y=\alpha x\\ z=x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\alpha-2)x=0\\ y=\alpha x\\ z=x\end{cases}$

Si $\underline{\alpha\neq 2}$ $E_1\cap E_2=\{0\}$ $E_1+E_2=\mathbb{R}^3\Rightarrow E_1\oplus E_2=\mathbb{R}^3$. (03pts).

(Remarque : si $\alpha=2$ $E_1\cap E_2=\{(x,2x,x),\ x\in\mathbb{R}\}=E_2\neq\{0\}$.
Dans ce cas $\mathbb{R}^3\neq E_1\oplus E_2$ et $E_2 \underset{sev}{\subseteq} E_1$).

Exercice 2 :

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z)\longmapsto(x+y,\ x+y,\ x+y+z).$$

1/ $\ker f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ (x+y,x+y,x+y+z)=(0,0,0)\}$

$f(x,y,z)=0\Rightarrow\begin{cases}x+y=0\\ x+y=0\\ x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x\\ z=0\end{cases}\Rightarrow \ker f=\{(x,-x,0),\ x\in\mathbb{R}\}\neq\{0\}$.

f n'est pas injective.

il est facil de voir que $\{(1,-1,0)\}$ est une base de $\ker f$

donc $\dim \ker f = 1$. (2pts)

2°/ Comme $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(f: E \to F \quad \dim E = \dim F)$.

alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective (2pts)

Comme f n'est pas injective alors f n'est pas surjective et n'est pas bijective.

3°/ D'après le thm de la dimension

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow 3 = 1 + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2.$$

Il est facil de voir que $\{(1,1,1),\ (0,0,1)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$ (02pts)

Exercice 3: $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

1°/ $$M^3 + 2M^2 - M = \begin{pmatrix} -15 & 14 & 14 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I. \qquad \text{(03pts)}$$

$M^3 + 2M^2 - M = 2I$.

2°/ Comme $M^3 + 2M^2 - M = 2I \Rightarrow M(M^2 + 2M - I) = 2I$

$$\Rightarrow M\left[\tfrac{1}{2}(M^2+2M-I)\right] = \left[\tfrac{1}{2}(M^2+2M-I)\right]M = I$$

Donc M est inversible

$$M^{-1} = \frac{1}{2}(M^2 + 2M - I) \qquad \text{(02pts)}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 4 \\ 5/2 & -13/2 & -11/2 \end{pmatrix} \qquad \text{(02pts)}$$