Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
1ère Année MI
Algèbre I

Examen de rattrapage

Exercice 1 : (06pts)

En utilisant les congruences, montrer qu'un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exercice 2 : (07pts)

On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y$$

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer $\dot{a}$; la classe d'équivalence du réel a .

Exercice 3 : (07pts)

Soit l'application f définie comme suit :

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x+y, xy)$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?

- Algèbre I -

Corrigé de l'Examen de Rattrapage.

Exercice 1: Soit un entier donné n ; n peut s'écrire sous la forme:

$$n = a_p a_{p-1} a_{p-2} \cdots a_0 = a_0 + a_1 \times 10 + \cdots + a_{p-1} \times 10^{p-1} + a_p \times 10^p. \quad (1pt).$$

(écriture en système décimal).

Or comme : $10 \equiv 1 [9]$ alors $10^2 \equiv 1^2 [9]$ i.e $10^2 \equiv 1 [9]$

et plus généralement $10^k \equiv 1 [9]$ (1pt)

D'un autre côté comme $a_0 \equiv a_0 [9]$; $a_1 \equiv a_1 [9], \ldots, a_p \equiv a_p [9]$ (1pt)

Donc $n = a_p a_{p-1} \cdots a_1 a_0 \equiv (a_0 + a_1 + \cdots + a_p) [9]$ (1pt)

donc pour que n soit divisible par 9 i.e $n \equiv 0 [9]$, il est nécessaire et suffisant que $(a_0 + a_1 + \cdots + a_p)$ soit un multiple de 9. dans ce cas $n \equiv 0 [9]$ cqfd (2pts)

Exercice 2: Sur $\mathbb{R}$; $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y$.

1°/ Il est facile de vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence car de la forme $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ avec $f(x) = x^3 - 3x$.

Reflexive (1pt)
Symétrique (1pt)
transitive (1pt).

2°/ Soit $a \in \mathbb{R}$; $\dot{a} = \{x \in \mathbb{R},\ x \mathcal{R} a\} = \{x \in \mathbb{R},\ a \mathcal{R} x\}$.

$x \mathcal{R} a \Leftrightarrow x^3 - 3x = a^3 - 3a \Leftrightarrow x^3 - a^3 - 3(x-a) = 0 \Leftrightarrow (x-a)[x^2 + ax + a^2 - 3] = 0$.

Donc $x = a$ ou $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ pour résoudre la deuxième équation

$\Delta = 12 - 3a^2$ D'où

a	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

(1pt)

– Algèbre I –

Corrigé de l'Examen de Rattrapage.

Exercice 1: Soit un entier donné n ; n peut s'écrire sous la forme:

$$n = a_p a_{p-1} a_{p-2} \cdots a_0 = a_0 + a_1 \times 10 + \cdots + a_{p-1} \times 10^{p-1} + a_p \times 10^p. \qquad (1pt).$$

(écriture en système décimal)

Or comme : $10 \equiv 1[9]$ alors $10^2 \equiv 1^2[9]$ i.e $10^2 \equiv 1[9]$

et plus généralement $10^k \equiv 1[9]$ (1pt)

D'un autre côté comme $a_0 \equiv a_0[9]$; $a_1 \equiv a_1[9], \ldots, a_p \equiv a_p[9]$ (1pt)

Donc $n = a_p a_{p-1} \cdots a_1 a_0 \equiv (a_0 + a_1 + \cdots + a_p)[9]$ (1pt)

donc pour que n soit divisible par 9 i.e $n \equiv 0[9]$, il est nécessaire et suffisant que $(a_0 + a_1 + \cdots + a_p)$ soit un multiple de 9 dans ce cas $n \equiv 0[9]$ cqfd (2pts)

Exercice 2: Sur $\mathbb{R}$; $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y$.

1°/ Il est facile de vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence car de la forme $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ avec $f(x) = x^3 - 3x$.

Reflexive (1pt)
Symétrique (1pt)
transitive (1pt).

2°/ Soit $a \in \mathbb{R}$; $\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}a\} = \{x \in \mathbb{R}, a\mathcal{R}x\}$.

$x\mathcal{R}a \Leftrightarrow x^3 - 3x = a^3 - 3a \Leftrightarrow x^3 - a^3 - 3(x-a) = 0 \Leftrightarrow (x-a)[x^2 + ax + a^2 - 3] = 0$.

Donc $x = a$ ou $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ pour résoudre la deuxième équation

$\Delta = 12 - 3a^2$ D'où

a	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	0	$-$	

(1pt)

Il y'a donc trois cas possibles.

1er cas : $a \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$; $\Delta < 0$ alors $\dot{a} = \{a\}$ (1pt)

2ème cas : $a \in]-2, 2[$, $\Delta > 0$ alors $\dot{a} = \{a, a_1, a_2\}$

où $a_1 = \dfrac{-a - \sqrt{12 - 3a^2}}{2}$ et $a_2 = \dfrac{-a + \sqrt{12 - 3a^2}}{2}$ (1pt)

3ème cas : $a = \pm 2$; $\Delta = 0$ alors $\dot{a} = \{a, \frac{-a}{2}\}$.

i.e $\dot{2} = \{2, -1\}$; $(\dot{-2}) = \{-2, 1\}$ (1pt)

EXERCICE 3 :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = (x + y, x \cdot y)$.

1°/ Il suffit d'observer que $f(x,y) = f(y,x)$ pour déduire que f n'est pas injective ; en effet par exemple : $X_1 = (2,3)$; $X_2 = (3,2)$

$f(X_1) = (2+3, 2 \cdot 3) = (5,6)$ et $f(X_2) = (3+2, 3 \cdot 2) = (5,6)$.

Donc $f(X_1) = f(X_2) = (5,6)$ bien que $(2,3) \neq (3,2)$ (03pts)

2°/ Soit $Y \in \mathbb{R}^2$ $(Y = (x', y'))$ essayons de résoudre " l'équation " $Y = f(X)$ avec $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$Y = f(X) \Rightarrow (x', y') = f(x,y) \Rightarrow (x', y') = (x+y, x \cdot y) \Rightarrow \begin{cases} x + y = x' \\ x \cdot y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (x' - x) \\ x(x' - x) = y' \end{cases}$

La deuxième équation du système donne : $x^2 - x'x + y' = 0$

pour la résoudre (en x) $\Delta = x'^2 - 4y'$; donc si $x'^2 - 4y' < 0$.

l'équation n'admet pas de solution et donc $Y = (x', y')$ n'admet pas d'antécédent par f ; donc f n'est pas surjective ; en effet

par exemple $(x', y') = (0, 1)$ alors $0^2 - 4 \times 1 = -4 < 0$

$(0,1) = f(x,y) \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x \cdot y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x^2 = 1 \end{cases}$ système qui ne possède pas de solution

$= (x+y, x \cdot y)$

donc f n'est pas surjective !

(04pts)