Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
1ère Année MI
Algèbre I

Examen de rattrapage

Exercice 1 : (04pts)

1. Rappeler la définition d'une équation diophantienne.
2. Sous quelle condition l'équation diophantienne :

$$ax + by = 1$$

admet-elle des solutions ?

Exercice 2 : (06pts)

Soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que } f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

1. f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?
2. Donner $f(\mathbb{R})$; l'image directe de $\mathbb{R}$ par l'application f.

Exercice 3 : (06pts)

On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y$

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer $\dot{a}$; la classe d'équivalence du réel a .

Exercice 4 : (04pts)

Sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ on définit la loi $*$ comme suit :

$$x * y = x + y + xy$$

1. Vérifier que $*$ est une l.c.i (loi de composition interne).
2. Montrer que $(\mathbb{R} - \{-1\}, *)$ est un groupe commutatif.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
1ère Année MI
Algèbre I

Examen de rattrapage

***Exercice 1** : (04pts)*

1. *Rappeler la définition d'une équation diophantienne.*
2. *Sous quelle condition l'équation diophantienne :*

$$ax + by = 1$$

admet-elle des solutions ?

***Exercice 2** : (06pts)*

Soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ telle que } f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

1. *f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?*
2. *Donner $f(\mathbb{R})$; l'image directe de $\mathbb{R}$ par l'application f.*

***Exercice 3** : (06pts)*

On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y$

1. *Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer $\dot{a}$; la classe d'équivalence du réel a .*

***Exercice 4** : (04pts)*

Sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ on définit la loi $*$ comme suit :

$$x * y = x + y + xy$$

1. *Vérifier que $*$ est une l.c.i (loi de composition interne).*
2. *Montrer que $(\mathbb{R} - \{-1\}, *)$ est un groupe commutatif.*

Corrigé de l'examen de rattrapage

Algèbre I.

Exercice 1:

1. Une équation diophantienne est une équation dont les coefficients sont des nombres entiers et dont les solutions recherchées sont également entières (02pts).

2. L'équation diophantienne $ax+by=1$ admet des solutions ssi $pgcd(a,b)=1$ i.e ssi a et b sont premiers entre eux (02pts).

Exercice 2: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. */ Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{2x_1}{1+x_1^2} = \dfrac{2x_2}{1+x_2^2} \Rightarrow 2x_1(1+x_2^2) = 2x_2(1+x_1^2)$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 x_2 = 1.$$

Donc pour $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ $(x_1 x_2 = 1)$ on trouve que $f(x_1) = f(x_2) = \frac{4}{5}$ et pourtant $x_1 \neq x_2$ donc f n'est pas injective. (02pts).

*/ Soit $y \in \mathbb{R}$; $y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{2x}{1+x^2} \Rightarrow yx^2 - 2x + y = 0$.

$\Delta = 4 - 4y^2 = 4(1-y^2)$ donc $\Delta \geqslant 0$ ssi $y \in [-1, 1]$.

Donc l'équation $y = f(x)$ admet des solutions uniquement si $y \in [-1,1]$

Par exemple $y = 2$ n'admet pas d'antécédent par f ; en effet

$$y = 2 = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \quad (\Delta = -3 < 0)$$

donc f n'est pas surjective (02 pts).

2. D'après ce qui précède $f(\mathbb{R}) = \{ y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x) \}$

$$= [-1, 1] \qquad (02\,pts)$$

Exercice 3 : Sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff x^3-3x = y^3-3y$.

1°/ $\mathcal{R}$ relation d'équivalence : reflexive + symétrique + transitive (02pts)

2°/ Soit $a\in\mathbb{R}$, $\dot{a} = \{x\in\mathbb{R},\ x\mathcal{R}a\}$

$x\mathcal{R}a \Rightarrow x^3-3x = a^3-3a \Rightarrow (x-a)\left[x^2+ax+a^2-3\right]=0.$

Donc $x=a$ ou $x^2+ax+a^2-3=0$. pour résoudre la deuxième équation

$$\Delta = 12-3a^2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta>0 \text{ ssi } a\in\,]-2,2[\\ \Delta<0 \text{ ssi } a\in\,]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[\\ \Delta=0 \text{ ssi } a=\pm 2 \end{cases}$$ (01pt).

1er cas : Si $a\in\,]-2,2[$ $\quad \dot{a}=\{a,a_1,a_2\}$ $\quad a_1=\dfrac{-a-\sqrt{12-3a^2}}{2}$ (01pt)

$a_2=\dfrac{-a+\sqrt{12-3a^2}}{2}$

2ème cas : Si $a\in\,]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ $\quad \dot{a}=\{a\}$. (01pt)

3ème cas : Si $a=\pm 2$, $\quad \dot{a}=\{a,-\frac{a}{2}\}$ i.e $\dot{2}=\{2,-1\}$, $(\dot{-2})=\{-2,1\}$ (01pt)

Exercice 4 : Pour $x,y\in\mathbb{R}-\{-1\}$ $\quad x*y = x+y+xy$.

1./ Supposons par l'absurde que $x*y=-1$ avec $x\neq-1$ et $y\neq-1$.

$x*y = x+y+xy=-1 \Rightarrow x(1+y) = -(1+y) \Rightarrow x=-1$ contradiction

donc si $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, $y\in\mathbb{R}-\{-1\}$ donc $x*y\in\mathbb{R}-\{-1\}$ $\quad *$. l.c.i (01pt)

2./ $(\mathbb{R}-\{-1\},*)$ groupe commutatif.

- $*$ commutative $\quad x*y = x+y+xy = y+x+yx = y*x.$ $\quad \forall x,y\in\mathbb{R}-\{-1\}$
- $*$ associative $\quad (x*y)*z = (x*y)*z$ $\quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}-\{-1\}$ (1pt)

  $= x+y+z+xy+xz+yz+xyz$
-

$x*e = x \Rightarrow x+e+xe = x \Rightarrow e(x+1)=0 \Rightarrow e(x+1)=0 \Rightarrow e=0$ $(x\neq-1)$ (1pt)

0 élément neutre.

- $x*x'=0 \Rightarrow x+x'+xx'=0 \Rightarrow x'(1+x)=-x \Rightarrow x'=\dfrac{-x}{1+x}$ $\quad (x\neq-1)$.

le symétrique de x est donné par $x'=\dfrac{-x}{1+x}$ (1pt)

(on remarquera que $x'\neq-1$).