Devoir Analyse & Algèbre

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0 \qquad (E_n)$$

1. Montrer que (E_n) possède une solution unique qu'on notera α_n.
2. Montrer que $\alpha_n \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, et que la suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Corrigé Exercice 1 :

1. Considérons la fonction $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x$, l'équation (E_n) se ramène alors à $f_n(x) = 1$.

f_n ainsi définie est continue strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $f_n(0) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, c'est donc une bijection entre $[0, +\infty[$ et $[0, +\infty[$, et donc $f_n(x) = 1$ possède une solution unique.

2. $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$, ainsi $f_n\left(\frac{1}{2}\right) - 1 < 0$, d'un autre côté

   $f_n(1) = n$, ainsi $f_n(1) - 1 \geq 0$, comme conséquence du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $f_n(x) - 1$; permet de conclure que $\alpha_n \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Par définition même des α_n , on a $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$, observons aussi que

$$f_{n+1}(\alpha_n) = {\alpha_n}^{n+1} + {\alpha_n}^{n} + {\alpha_n}^{n-1} + \cdots + \alpha_n = \alpha_n\left({\alpha_n}^{n} + {\alpha_n}^{n-1} + \cdots + \alpha_n\right) + \alpha_n = 2\alpha_n$$

D'après ce qui précède $\alpha_n > \frac{1}{2}$ et donc $2\alpha_n > 1$, ainsi $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) < f_{n+1}(\alpha_n)$, comme f_{n+1} est croissante alors nécessairement $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée (par $\frac{1}{2}$) elle est donc convergente.

3. Posons $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = l$, du fait que $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante alors $l < 1$. D'autre part ${\alpha_n}^n + {\alpha_n}^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 1 \Rightarrow \alpha_n \frac{1-{\alpha_n}^n}{1-\alpha_n} = 1$, en passant à la limite dans la dernière égalité et du fait que $l < 1$, on obtient $\frac{l}{1-l} = 1$, et par suite $l = \frac{1}{2}$.

<u>Exercice 2 :</u> Par un raisonnement par l'absurde (et par une approche algébrique), montrer que

$$\mathbf{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots}$$

est irrationnel.

<u>Corrigé Exercice 2 :</u>
Supposons par l'absurde que

$$\mathbf{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\frac{p}{q}}$$

Avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ (p et q sont nécessairement positifs car la somme dans le premier membre de l'égalité est positive.) Multiplions les deux termes de l'égalité par $q!$, on obtient

$$\mathbf{q!\,(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots)=q!\frac{p}{q}}$$

on obtient

$$\mathbf{q!+q!+\frac{q!}{2!}+\frac{q!}{3!}+\cdots+\frac{q!}{q!}+\frac{q!}{(q+1)!}+\frac{q!}{(q+2)!}+\cdots+\frac{q!}{n!}+\cdots=(q-1)!\,p}$$

Après simplifications

$$\mathbf{q!+q!+(3\times 4\times 5\times \ldots.\times q)+(4\times 5\times \ldots.\times q)+\cdots+1+\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}}$$
$$\mathbf{+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots=(q-1)!\,p}$$

Et donc

$$\mathbf{(q-1)!\,p-(q!+q!+(3\times 4\times 5\times \ldots.\times q)+(4\times 5\times \ldots.\times q)+\cdots+1)}$$
$$\mathbf{=\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots}$$

Clairement

$$\mathbf{(q-1)!\,p-(q!+q!+(3\times 4\times 5\times \ldots.\times q)+(4\times 5\times \ldots.\times q)+\cdots+1)=m\in\mathbb{N}}$$

Donc

$$\mathbf{m=\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots}$$

D'un autre côté

$$\mathbf{\frac{1}{(q+1)(q+2)}<\frac{1}{(q+1)(q+1)}=\frac{1}{(q+1)^2}}$$
$$\mathbf{\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}<\frac{1}{(q+1)(q+1)(q+1)}=\frac{1}{(q+1)^3}}$$

Soit encore

$$\mathbf{0} < m < \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{q}+\mathbf{1})} + \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{q}+\mathbf{1})^{2}} + \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{q}+\mathbf{1})^{3}} + \cdots$$

On retrouve la somme des termes d'une suite géométrique

$$\mathbf{0} < m < \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{q}+\mathbf{1})} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{q}+\mathbf{1})}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}}$$

$$\mathbf{0} < m < \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q}} < 1$$

Ce qui est absurde car $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$