20.10.2010 :

Exercice 01 : Sans resoudre donner l'allure g^{le} des courbes solutions des equations :

1°/ $\dot{x} = x^3 - x$

2°/ $\dot{x} = x \ln x$

3°/ $\dot{x} = \sin x \cos x$ et $x(0) \in [-2\pi, 2\pi]$

Exercice 02 : Soit les eq. du type : $\frac{dN}{dt} = N g(N)$

Etudier les pts d'equilibres de l'eq. dans chaque cas.

1°/ $g(N) = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ « logistique »

2°/ $g(N) = -k \ln N$

3°/ $g(N) = \frac{r}{\alpha + N}$

Exercice 03 : Soit l'eq. $\frac{dn}{dt} = rn(K-n)(n-M)$ où r, K et M des constantes positives $M < K$

1°/ Rechercher les pts d'equilibre, et etudier leur nature.

2°/ Donner l'allure g^{le} des sol.

3°/ Donner une interpretation biologiques des resultats.

Rq. (logistique).

Soient α_0 = taux de natalite, β_0 = taux de mortalite.

$\frac{dx}{dt} = \alpha_0 x - \beta_0 x = (\alpha_0 - \beta_0)x$ mais taux de nata $= \alpha_0 - \alpha x$, " de morta $= \beta_0 + \beta x$

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha_0 - \alpha x)x + (\beta_0 + \beta x)x = (\alpha_0 - \beta_0)x\left[1 - \frac{\alpha - \beta}{\alpha_0 - \beta_0}x\right] = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

02.11.2010

Exo 1 :

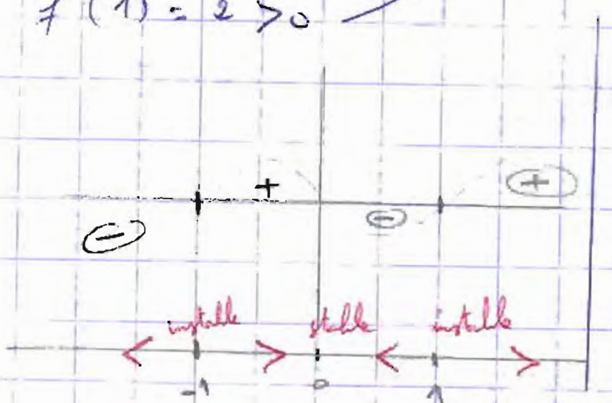
1°/ $\dot{x} = x^3 - x = f(x)$

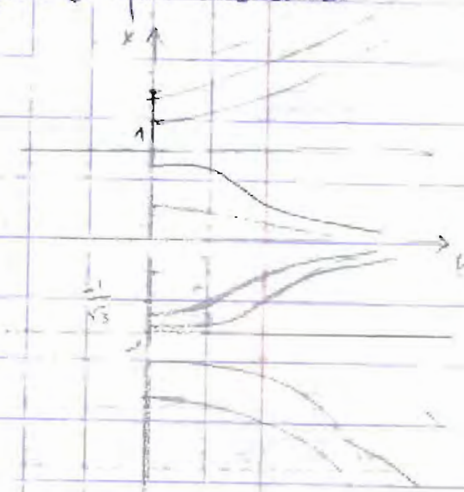
pts d'equilibre : $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.

$f'(0) = -1 < 0 \longrightarrow x^* = 0$ pt d'eq. stable.

$f'(-1) = 2 > 0 \longrightarrow x^* = \pm 1$ pts. d'equ. instables.

$f'(1) = 2 > 0$

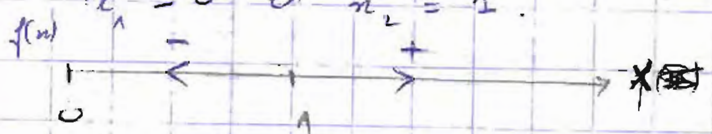


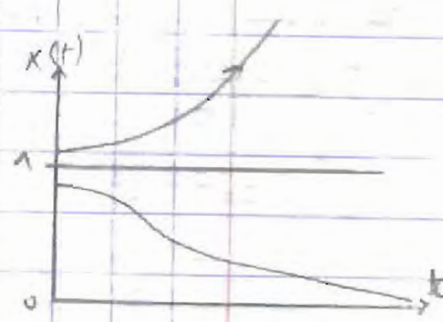


2°/ $\dot{x} = x \ln x = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$x_1^* = 0$ et $x_2^* = 1$.





03 . 11 . 2010 :

4°/ $\dot{x} = \sin x \cos x$. $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

p^t d'equilibre :

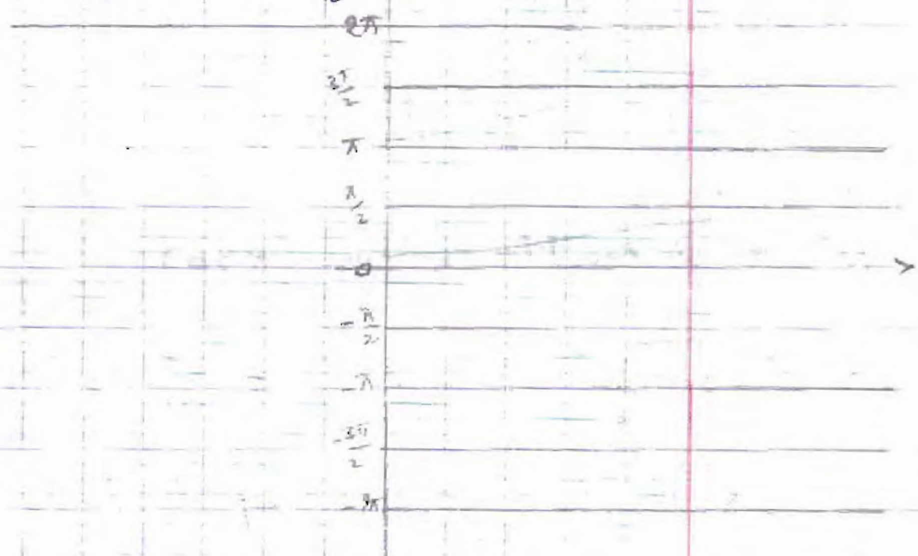
$f(x) = 0 \Rightarrow \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^*_{1k} = k\pi \\ x^*_{2k} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$f'(x^*_{1k}) = 1 > 0$. $k\pi$: instables.

$f'(x^*_{2k}) = -1 < 0$ $(2k+1)\frac{\pi}{2}$: stables.



EXO 2 :

$\dot{N} = N g(N)$.

N^* pt d'équilibre non nul i.e $N^* g(N^*) = 0 \Rightarrow g(N^*) = 0$.

1°/ $f(N) = N g(N)$.

$f'(N) = g(N) + N g'(N)$.

$f'(N^*) = N^* g'(N^*)$.

pour que N^* ~~∄~~ stable il faut $f'(N^*) < 0$ i.e

$N^* g'(N^*) < 0$ comme $N^* > 0$ alors $g'(N^*) < 0$.

Donc :

N^* est stable si $g'(N^*) < 0$.

2°/ a°| . logistique :

$$\dot{N} = N r \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

pt d'équi :

N^* vérifie $r\left(1 - \frac{N^*}{K}\right) = 0 \Rightarrow N^* = K$

$N^* = 0$ trivial.

$N^* = K$ pt d'équilibre non nul $(K > 0)$

$$g'(N) = \frac{-r}{K} \quad , \quad g'(N^*) = \frac{-r}{K} < 0 \quad \text{car} \begin{pmatrix} r > 0 \\ K > 0 \end{pmatrix}$$

$N^* = K$ stable. (K : s'appelle capacité limite de la population).

Rque

$$\dot{N} = N r \left(1 - \frac{N}{K}\right) \Rightarrow \frac{\dot{N}}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = r$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = r\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = \frac{\alpha}{N} + \frac{\beta}{1-\frac{N}{K}} = \frac{1}{N} + \frac{1/K}{1-\frac{N}{K}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} = \int \frac{1}{N}\,dN + \frac{1}{K}\int \frac{dN}{1-\frac{N}{K}}$$

$$= \ln N - \ln\left(1-\frac{N}{K}\right)$$

$$\frac{N}{\left(1-\frac{N}{K}\right)} = Ce^{rt} \quad (1) \text{ avec } N(0) = N_0 .$$

$$C = \frac{N_0}{\left(1-\frac{N_0}{K}\right)}$$

$$(1) \Rightarrow N = Ce^{rt}\left(1-\frac{N}{K}\right) \Rightarrow N\left(1+\frac{Ce^{rt}}{K}\right) = Ce^{rt}$$

$$\Rightarrow N = \frac{Ce^{rt}}{1+\frac{Ce^{rt}}{K}} = \frac{K.C.e^{rt}}{K+Ce^{rt}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} K .$$

EXO 3 :

$$\dot{N} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - Q$$

$$\dot{N} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) - QN$$

les deux eq. représentent une populatio exploitée. Q et QN représentent le terme d'exploitation

Q : quotat fixé , QN : taux en fct de la taille de la population.

En l'absence de terme d'exploitation ($Q=0$) la populatio évolue suivant une eq. logistique.

09.11.2010.

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q$$

pts d'équilibre :

$$-r\frac{N^2}{K} + rN - Q = 0.$$

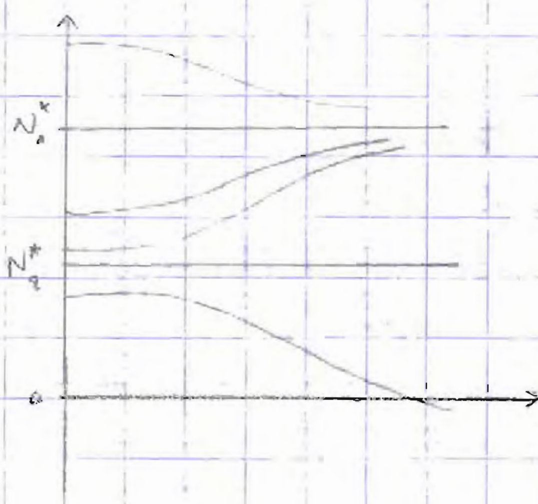
$$\Delta = r\left(r - \frac{4Q}{K}\right) \qquad (r > 0).$$

1er cas : $\Delta > 0$: i.e $\boxed{Q < \frac{rK}{4}}$

$$N_1^* = \frac{r + \sqrt{\Delta}}{2r} K > 0 \qquad \text{(admet une signification biologique)}$$

$$N_2^* = \frac{r - \sqrt{\Delta}}{2r} K < 0 \qquad (\quad \text{"} \quad).$$

N		N_2^*		N_1^*	
	<		>		<
f(N)	−	0	+	0	−



si on choisit $N_0 > N_2^*$
on a la stabilité
qd : $t \to +\infty$ vers N_1^*.

2ème cas : $\Delta = 0$ i.e $\boxed{Q = \frac{Kr}{4}}$

$N_1^* = N_2^* = \frac{K}{2} > 0$.

Shunt négatif (on considère comme instable)

3ème cas : $\Delta < 0$, i.e $Q > \frac{Kr}{4}$.

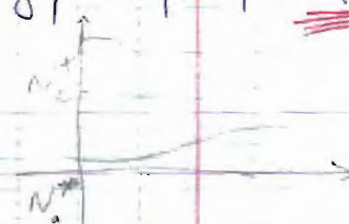
$\dot{N} < 0 \Leftrightarrow N$ décroissante $\Longrightarrow$ extinction .

$\boxed{\text{II}}$ $\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - QN$.

$f(N) = 0 \Rightarrow N_1^* = 0$ ou $N_2^* = \frac{r-Q}{r}K$

Pour que N_2^* a une signification biologique il faut que $Q < r$

- $f'(0) = r - Q > 0$. eq instable .
- $f'(N_2^*) = Q - r < 0$. eq. stable .



$\boxed{\text{III}}$ $\dot{N} = N\left(r - \frac{r}{K}N - Q\right)$

$= (r-Q)N\left(1 - \frac{r}{K} \cdot N \cdot \frac{1}{r-Q}\right)$

$= r' N\left(1 - \frac{N}{K'}\right)$ avec $K' = \frac{K}{r}(r-Q)$

On retrouve ~~notre~~

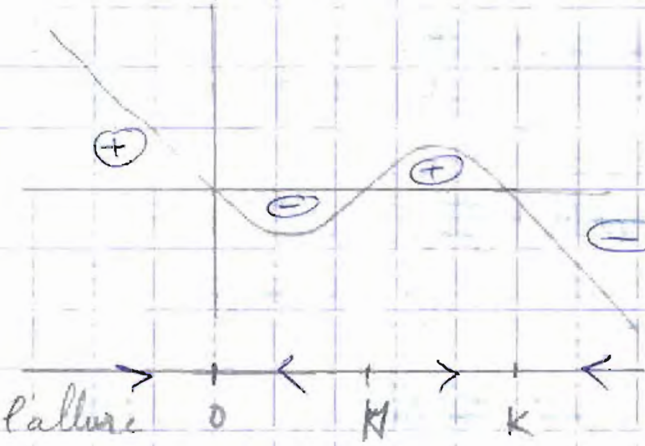
$N^* = K'$,

EXO4 : $\dot{N} = rN(K-N)(N-M)$. $(r>0)$

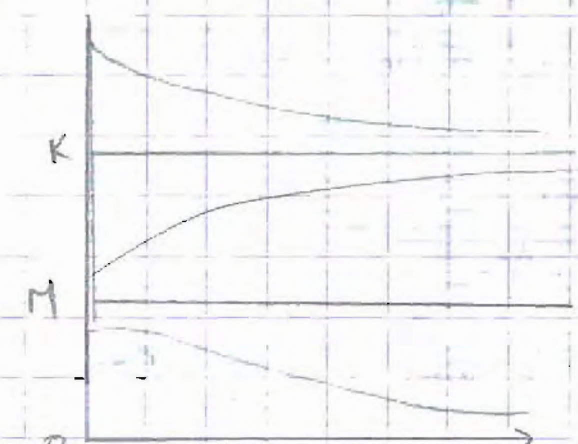
$(0<M<K)$

1°/ pts d'équilibre :

$N_1^* = 0$, $N_2^* = M$, $N_3^* = K$.



2°/ l'allure



3°/ Si $N_0 < M$ (ou bien $N<M$) alors la popul. va vers l'extinction

$$N \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Si $N_0 > M$ la pop. va vers K. $N \xrightarrow[t \to +\infty]{} K$

M est le seuil en delà du-quel il ne faut pas decendre.

EXOS : ( )

Fiche TD.2 :

EXO 1. Resoudre :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 7y \\ \dot{y} = 2x + 3y \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

1/ les pts d'equilibre :

la sol est : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 20$, $\det(A - \lambda I) = 0$

$\Delta = 81$

$\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 5$.

$Av_1 = -4v_1$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$(A + 4I)v_1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = a \\ v_2 = \frac{-2}{7} a \end{cases} \qquad v_1 = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

pour $a = 7$:

$$\boxed{v = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$Av_2 = 5v_2 \Rightarrow v_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$P = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = PY$$

$$\dot{X} = \underline{P\dot{Y}} = AX = \underline{APY} \Rightarrow \dot{Y} = P^{-1}APY.$$

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} Y,$$

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-4t} \\ y_2(t) = c_2 e^{5t} \end{cases}$$

$$X = PY \Rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-4t} \\ c_2 e^{5t} \end{pmatrix}.$$

09.11 2010.

ex/ $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

p^t d'equilibre $(0,0)$.

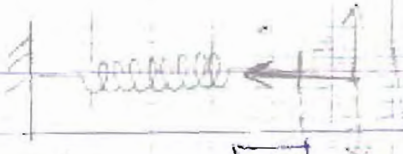
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{forme canonique connue de } (0,0) \text{ est un centre}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$X = e^{At} X_0.$$

$$= e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} X_0.$$

$$X = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} X_0$$

le syst est equivalent à $\ddot{x} = -x$.



$\sum \vec{F} = m\gamma \Rightarrow m\ddot{x} = -kx$

Rappel : Soit $\lambda = \alpha \pm i\beta$ val. propre.

$AZ = \lambda Z$ avec $Z = u + iv$.

$A(u+iv) = (\alpha + i\beta)(u+iv)$.

$Au + iAv = \alpha u - \beta v + i(\beta u + \alpha v)$

$\Rightarrow \begin{cases} Au = \alpha u - \beta v \\ Av = \beta u + \alpha v \end{cases}$

A écrite dans la base $\{v, u\}$. $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ +\beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{array}{cc} v & u \\ \left(\downarrow\right. & \left.\downarrow\right) \end{array}$

(4)

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x - 2y \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2+\lambda) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$

$\Delta = -4 \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$

$(0,0)$ foyer stable

$$AZ = \lambda Z \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ -2a-2b \end{pmatrix} = (-1+i)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b = (-1+i)\, a$$

$$\Rightarrow$$

Si $a = 1 \quad b = -1+i \quad \Rightarrow V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = e^{At} X_0$$

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow e^{At} = P e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} P^{-1}$$

EXO 1 :

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = b n_2 - v n_1 \\ \dot{n}_2 = v n_1 - d n_2 \end{cases}$$

$-v n_1$

Jeune (n_1) (Jovenes) | adulte (adultos) (n_2) $\xrightarrow{-d n_2}$ (mortalité)

$b n_2$ (naissance)

(mortalité des jeunes est négligeable)

$$\begin{pmatrix} \dot{n}_1 \\ \dot{n}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v & b \\ v & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

$\det = vd - vb = v(d - b) \quad (d \neq b)$

$tr = -v - d$

$tr < 0$. si $\det < 0$: p^t selle $(d < b)$. $\to \infty$

$tr < 0$ si $\det > 0$. stabilité $(d > b)$

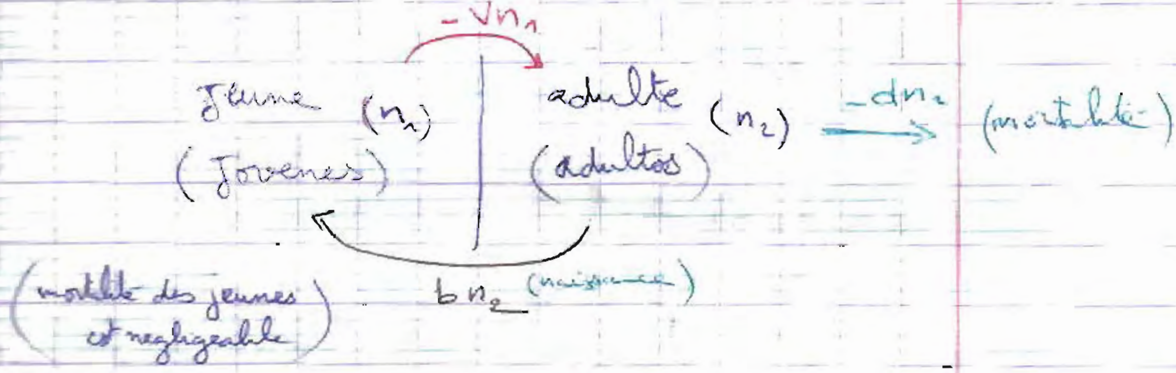
vers 0 (extinction).

EXO 2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = x - 1 \end{cases}$$

EXO4 :

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = b n_2 - v n_1 \\ \dot{n}_2 = v n_1 - d n_2 \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} \dot{n}_1 \\ \dot{n}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v & b \\ v & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

$\det = vd - vb = v(d-b)$ $(d \neq b)$

$tr = -v-d$

$tr<0$. si $\det<0$: p^t selle $(d<b)$. $\longrightarrow \infty$

$tr<0$ si $\det>0$: stabilité $(d>b)$

vers 0 (extinction).

EXO2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = x - 1 \end{cases}$$

Isocline verticale : $\dot{x} = 0$

$\dot{x} = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{y = x \text{ ou } y = -x}$

Isocline horizontal : $\dot{y} = 0$

$\dot{y} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$\dot{x} < 0$

1. $(-1, 0)$ $\leftarrow$
2. $(0, -1)$ $\rightarrow$
3. $(2, -3)$ $\rightarrow$
4. $(2, 0)$ $\leftarrow$
5. $(\frac{1}{2}, 0)$ $\leftarrow$
6. $(0, 4)$ $\rightarrow$

donc

$(1, 1)$ pt selle

$(1, -1)$ foyer stable.

linearisation :

matrice Jacobienne $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & 2y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$

$$J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{not}{=} A$$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$ $\qquad \lambda_1 = -1 - \sqrt{3}$, $\lambda_2 = -1 + \sqrt{3}$.

$$J_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

21.11.2010.

(2) $\begin{cases} \dot{x} = -xy. \\ \dot{y} = (1+x)(1-y). \end{cases}$

Pts d'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -xy = 0 \\ (1+x)(1-y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ y = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases}$$

les pts d'équi. sont : $(0,1)$ et $(-1,0)$.

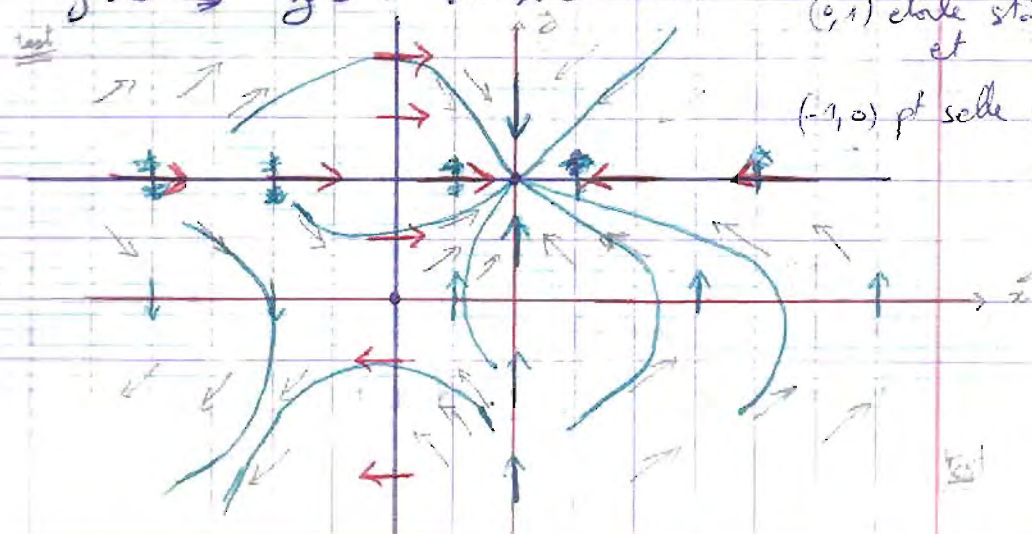
Esquisser le portrait de phase :

Isoclines :

$\dot{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

$\dot{y} = 0 \Rightarrow \cancel{x}\, y = 1$ ou $x = -1$.

$(0,1)$ étoile stable et $(-1,0)$ pt selle.



Linéarisation :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1-y & -(1+x) \end{pmatrix}$$

$$J_{(0,1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ $\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0 \text{ stable} \\ \lambda_1 = \lambda_2 \text{ diag donc étoile}\end{array}\right\}$ étoile stable.

$$J_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(J - \lambda I_2) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ pt selle.

(2 val. propres de signes opposés).

Ex 03 :

$$(S_1) : \begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2+y^2) \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

1°/ Linéarisation :

$$J_{1(x,y)} = \begin{pmatrix} 3x^2+y^2 & -1+2xy \\ 1+2xy & x^2+3y^2 \end{pmatrix}$$

$$J_1(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ — $(0,0)$ est un centre

$$J_2(x,y) = \begin{pmatrix} -3x^2 - y^2 & -1-2xy \\ 1-2xy & -x^2-3y^2 \end{pmatrix}$$

$$J_{2(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ $(0,0)$ est un ~~pt~~ centre.

Rques :

- les deux syst présentent la même partie linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

- $(0,0)$ est un ~~pt~~ centre pour le syst. linéarisé. On ne peut rien dire pour (S_1) et (S_2) (centre est un pt non hyperbolique, pas nécessairement conservé par linéarisation). ([illegible] stable)

22.11.2010

2°/ On passe ~~en~~ coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \mathrm{tg}\,\theta = y/x \end{cases} \overset{\frac{\partial}{\partial t}}{\Longrightarrow} \begin{cases} 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ \dfrac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \dfrac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} \end{cases}$$

(S_1) devient :

$$\begin{cases} r\dot{r} = -xy + x^2 r^2 + xy + y^2 r^2 \\ \dfrac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \dfrac{x^2 + xyr^2 + y^2 - xyr^2}{x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = r(x^2+y^2) = r^3 \\ \dfrac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \dfrac{r^2}{x^2} = \dfrac{r^2}{r^2\cos^2\theta} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

[illegible] $= \{x=0, y=0\} \Rightarrow r = 0$

instable

(S_2) devient $\begin{cases} r\dot{r} = -x^2r^2 - y^2r^2 = -r^4 \\ \dfrac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \dfrac{r^2}{x^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = -r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$

stable

Rque :

(S_1) et (S_2) donnent un exple où le th. de linéarisation n'est pas valable ($(0,0)$ étant un centre).

Ex 05

$(r > E)$ $(s > F)$.

$$(I) \begin{cases} \dot{x} = rx\left(1-\dfrac{x}{K}\right) - axy - Ex & \cdots (+) \\ \dot{y} = sy\left(1-\dfrac{y}{M}\right) - bxy - Fy & \cdots (*) \end{cases}$$

1°/ (compétition entre deux espèces).

Si $\begin{cases} \dot{x} = x f(x) - \alpha xy \\ \dot{y} = y g(y) - \beta xy \end{cases}$ compétition.

Si $\begin{cases} \dot{x} = x f(x) - \alpha xy \\ \dot{y} = y g(y) + \beta xy \end{cases}$ ~~prédateur~~ proie ; ~~proie~~ prédateur

Si $\begin{cases} \dot{x} = x f(x) + \alpha xy \\ \dot{y} = y g(y) + \beta xy \end{cases}$ mutualisme (تعايش، تعاون [illegible])

1/ . En l'absence de la population y, ~~x~~ suit une loi logistique avec un terme d'exploitation $(-Ex)$.

. En ______ x, y suit ______ ______ $(-Fy)$.

. les termes d'interaction $(-axy)$ et $(-bxy)$ veut dire que (entre les espèce x et y) la rencontre entre x et y nuit $(-)$ à chacune des deux populations, on dira qu'il y a compétition entre les 2 espèces.

2°/ Normalisation du système (I) $(K = M = 1)$

$$(*) \Rightarrow \dot{x} = (r - E)\, x \left(1 - \frac{r}{K(r-E)}\, x\right) - axy$$

$$\Rightarrow \dot{x} = (r - E)\, x \left(1 - \frac{x}{K(1-\frac{E}{r})}\right)$$

On pose :

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{K(1-\frac{E}{r})} \\ \rho = r - E > 0 \end{cases} \Rightarrow x = K\left(1-\frac{E}{r}\right) u \Rightarrow \dot{x} = K\left(1-\frac{E}{r}\right)\dot{u}$$

$$* \Rightarrow \cancel{K\left(1-\frac{E}{r}\right)}\dot{u} = \rho\, K\left(1-\frac{E}{r}\right) u(1-u) - aK\left(1-\frac{E}{r}\right) u\, y$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{u} = \rho\, u(1-u) - a\, u y} \quad (1)$$

m̂ chose pour (**) on obtient :

$$\boxed{\dot{v} = \delta\, v(1-v) - b\, x\, v} \quad (2) \quad \text{avec} \begin{cases} \delta = S - F > 0 \\ v = \dfrac{y}{M(1-\frac{F}{S})} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \rho\, u(1-u) - \alpha\, u v \\ \dot{v} = \delta\, v(1-v) - \beta\, u v \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} \alpha = \dfrac{aM}{S}\,\delta > 0 \\ \beta = \dfrac{bK}{r}\,\rho > 0 \end{cases}$$

Points d'équilibre

$$\begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = 0 \end{cases}$$

$\rho u(1-u) - \alpha u v = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $\rho(1-u) - \alpha v = 0$

Si $u = 0$: la 2ème équa donne :

$v = 0$ ou $v = 1$.

$(0,0)$ et $(0,1)$ 2 pts d'équi.

$\sigma v(1-v) - \beta u v = 0 \Rightarrow v = 0$ ou $\sigma(1-v) - \beta u = 0$.

Si $v = 0$: la 1ère eq donne

$u = 0$ ou $u = 1$.

$(0,0)$ et $(1,0)$ 2 pts d'équilibre.

Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$

$$\begin{cases} \rho(1-u) - \alpha v = 0 \\ \sigma(1-v) - \beta u = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{\rho}{\alpha}(1-u) \\ \sigma\left(1 - \frac{\rho}{\alpha}(1-u)\right) - \beta u = 0 \quad \text{...①} \end{cases}$$

$$① \Rightarrow u\left(\beta - \frac{\sigma\rho}{\alpha}\right) = \sigma - \frac{\sigma\rho}{\alpha}$$

$$\Rightarrow u = \frac{\sigma\left(1 - \frac{\rho}{\alpha}\right)}{\beta - \frac{\sigma\rho}{\alpha}} = \frac{\sigma(\alpha-\rho)}{\beta\alpha - \sigma\rho}$$

$$u^* = \frac{\sigma(\alpha-\rho)}{\beta\alpha - \sigma\rho}, \quad v^* = \frac{\rho}{\alpha}\left(1 - \frac{\sigma(\alpha-\rho)}{\beta\alpha - \sigma\rho}\right)$$

$$v^* = \frac{\rho}{\cancel{\alpha}}\left(\frac{\beta\alpha - \rho\sigma - \sigma\alpha + \sigma\rho}{\beta\alpha - \sigma\rho}\right) = \frac{\rho(\beta-\sigma)}{\beta\alpha - \sigma\rho}$$

$$(u^*, v^*) = \left(\frac{\sigma(\alpha-\rho)}{\beta\alpha - \sigma\rho}, \frac{\rho(\beta-\sigma)}{\beta\alpha - \sigma\rho}\right)$$

On a 4 pts d'équi sont $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et (u^*, v^*).
pour que (u^*, v^*) ait un sens biologique il est nécessaire d'avoir $u^*>0$, $v^*>0$

Soit $\begin{cases} \beta\alpha - \sigma\rho > 0 \\ \rho(\beta-\sigma) > 0 \\ \sigma(\alpha-\rho) > 0 \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} \text{———} < 0 \\ \text{———} < 0 \\ \text{———} < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \beta\alpha > \sigma\rho \\ \beta > \sigma \\ \alpha > \rho \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} \beta\alpha < \sigma\rho \\ \beta < \sigma \\ \alpha < \rho \end{cases}$

Comme toutes les constantes sont positifs il suffit d'avoir

$\begin{cases} \beta > \sigma \\ \alpha > \rho \end{cases}$ ou $\begin{cases} \beta < \sigma \\ \alpha < \rho \end{cases}$

<u>Linearisation</u> :

$$J_{(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho - 2\rho u - \alpha v & -\alpha u \\ -\beta v & \sigma - 2\sigma v - \beta u \end{pmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (0,0) \text{ noeud instable}$$

$$J_{(0,1)} = \begin{pmatrix} \rho-\alpha & 0 \\ -\beta & -\sigma \end{pmatrix}$$

On a 2 v. propres sont $\rho-\alpha$ et $-\sigma<0$

pour $\rho>\alpha$: $(0,1)$ pt selle.

pour $\rho<\alpha$: $(0,1)$ est un noeud stable

$$J_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -\rho & -\alpha \\ 0 & \sigma-\beta \end{pmatrix}$$ on a 2 v.p : $\lambda_1 = -\rho$, $\lambda_2 = \sigma - \beta$.

Pour $\sigma > \beta$: ~~pt selle~~ $(1,0)$ pt selle .

Pour $\sigma < \beta$ $(1,0)$ noeud stable

$$J_{(u^*,v^*)} = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} ?$$

$$tr(J_{(u^*,v^*)}) = \rho + \sigma - 2\rho u^* - 2\sigma v^* - \alpha v^* - \beta u^*$$

$$= \rho + \sigma - (2\rho + \beta) u^* - (2\sigma + \alpha) v^*$$

$$= \frac{\cancel{\rho\beta\alpha} + \sigma\rho^2 + \cancel{\sigma\beta\alpha} + \sigma^2\rho - 2\rho\sigma\alpha + \cancel{2\sigma\rho^2} - \cancel{\beta\alpha\sigma} - \beta\sigma\rho - \cancel{2\sigma\rho\beta} + \cancel{2\rho\sigma^2} - \cancel{\alpha\rho\beta} + \cancel{\alpha\rho\sigma}}{\beta\alpha - \sigma\rho}$$

$$= \frac{\sigma\rho^2 + \sigma^2\rho - \rho\sigma\alpha - \beta\sigma\rho}{\beta\alpha - \sigma\rho}$$

$$= \frac{\sigma\rho(\rho+\sigma) - \rho\sigma(\alpha+\beta)}{\beta\alpha - \sigma\rho} = \frac{\rho\sigma\left[\rho + \sigma - \alpha - \beta\right]}{\beta\alpha - \sigma\rho} < 0$$

$tr < 0 \Rightarrow (u^*, v^*)$ soit stable soit pt selle

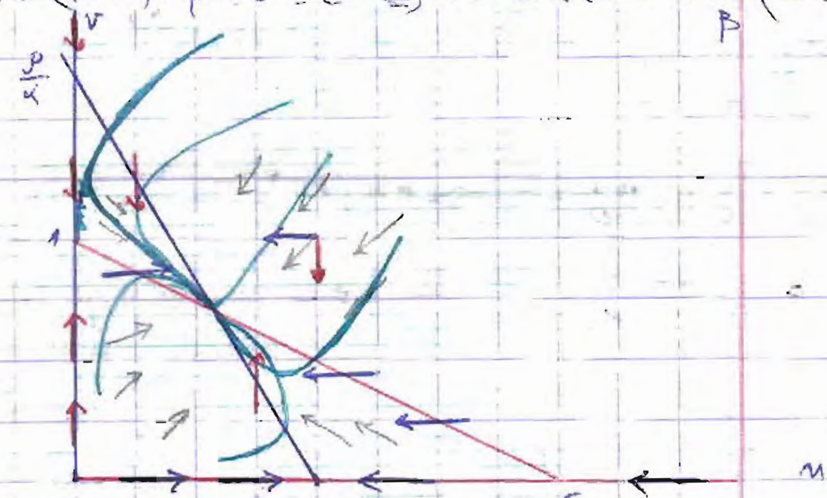
det > 0 det < 0.

Dans le cas $\rho > \alpha$ et $\sigma > \beta$.

<u>Isocline :</u>

vert : $\rho u(1-u) - \alpha u v = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $v = \frac{\rho}{\alpha}(1-u)$.

Hori : $\sigma v(1-v) - \beta u v = 0 \Rightarrow v = 0$ ou $u = \frac{\sigma}{\beta}(1-v)$.



23.11.2010 :

EXO8 : (Malaria) [illegible]

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha y(1-x) - r x \\ \dot{y} = a x(1-y) - \mu y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x < 1 \\ y < 1 \end{pmatrix}$$

x : proportion humains infectés.

y : ——— moustiques "

$(1-x)$: ——— des humains ~~infectés~~ sains

$(1-y)$: ——— moustiques sains

$\alpha y(1-x)$: interaction entre un moustique infecté ; et un homme sain.

$-r x$: proportion des hommes infectés qui ne le sont plus (decés, guérison).

$a\,x(1-y)$: interaction entre homme infecté et moustique sain
$-\mu y$: mortalité des moustiques infectés

2°/ Points d'équilibre en fct de $\alpha = \frac{abM}{N}$, $R = \frac{a\alpha}{\mu r}$ et μ.

$(\alpha y^*(1-x^*) - r x^* = 0 \Rightarrow y^* = \frac{r x^*}{\alpha(1-x^*)}$ $(x<1)$.

$(0,0)$ p^t d'équi.

$$a x(1-y) - \mu y = 0 \Rightarrow a x\left(1 - \frac{rx}{\alpha(1-x)}\right) - \mu\left(1 - \frac{rx}{\alpha(1-x)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{a\alpha - a\alpha x - a r x - \mu r}{\alpha(1-x)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \text{ou} \\ a\alpha - (a\alpha + ar)x - \mu r = 0 \Rightarrow x^* = \frac{a\alpha - \mu r}{a\alpha + ar} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{\frac{a\alpha - \mu r}{\mu r}}{\frac{a\alpha + ar}{\mu r}} \Rightarrow \boxed{x^* = \frac{R-1}{R+\frac{a}{\mu}}}$$

des condition : • $R \geq 1$ ($x^* \geq 0$ signification biologique)
• $x^* < 1$ (proportion)

$$y^* = \frac{r\left(\frac{R-1}{R+a/\mu}\right)}{\alpha\left(1 - \frac{R-1}{R+a/\mu}\right)} = \frac{r(R-1)}{\alpha\left(R+\frac{a}{\mu} - R + 1\right)} = \frac{r(R-1)\times\frac{1}{r}}{\alpha\left(\frac{a}{\mu}+1\right)\times\frac{1}{r}}$$

$$y^* = \frac{R-1}{R+\frac{\alpha}{r}}$$

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{R-1}{R+\frac{a}{\mu}}, \frac{R-1}{R+\frac{\alpha}{r}} \right)$$ et $(0,0)$ sont des pts d'équi.

Linéarisation :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -\alpha y - r & \alpha(1-x) \\ a(1-y) & -ax-\mu \end{pmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -r & \alpha \\ a & -\mu \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr} J_{(0,0)} = -(r+\mu) < 0$ (stable ou selle).

$\det J_{(0,0)} = r\mu - a\alpha < 0$ (car $R = \frac{a\alpha}{\mu r} > 1$)

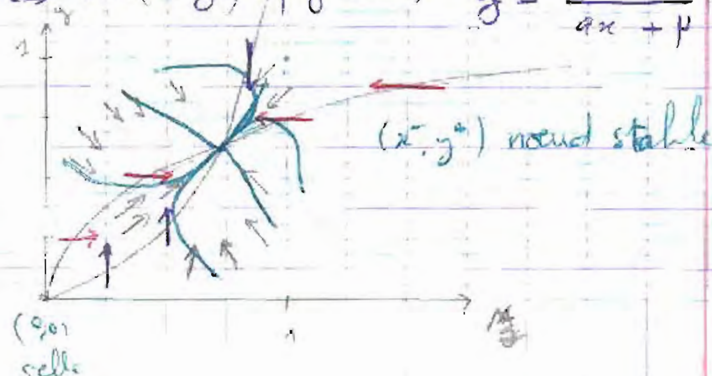
Donc $(0,0)$ est un pt selle.

$$J_{(x^*,y^*)} = \begin{pmatrix} -\alpha y^* - r & \alpha(1-x^*) \\ a(1-y^*) & -ax^* - \mu \end{pmatrix}$$

Représentation graphiques :

Isoclines :

- $\dot{x} = 0 \Rightarrow \alpha y(1-x) - rx = 0 \Rightarrow y = \frac{rx}{\alpha(1-x)}$
- $\dot{y} = 0 \Rightarrow ax(1-y) - \mu y = 0 \Rightarrow y = \frac{ax}{ax+\mu}$



23.11.2010.

Exo supplementaire.

Esquisser le portrait de phase des syst. suivants puis verifier les resultats obtenus par linearisation lorsque c'est possible.

$$\begin{cases}\dot{x} = 1 - x \\ \dot{y} = x^2 - y\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x} = x + 2 - y \\ \dot{y} = x^2 - y\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x} = y(x+1) \\ \dot{y} = (3-y)x\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x} = y - \sin x \\ \dot{y} = \frac{x}{4} - y\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x} = y + x^2 - 1 \\ \dot{y} = x^2 - y^2\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = (x-y)^2\end{cases}$$

(Intég 1ère) **Fonction de Lyapounov et intégrale première.**

EXO1 : Soient les systèmes :

$$(I)\begin{cases}\dot{x} = x - xy\\ \dot{y} = -y + xy\end{cases} \qquad (II)\begin{cases}\dot{x} = 2y\\ \dot{y} = 2x - 3x^2\end{cases}$$

1°/ trouver les pts d'équi et linéariser les syst (I) et (II)

2°/ " une intégrale première pour (I) puis pour (II)

3°/ Faire l'analyse de la conservation descente.

EXO2 : (fct de Lyapounov)

Soit le syst : $\begin{cases}\dot{x} = ax - y - x(x^2+y^2)\\ \dot{y} = x + ay - y(x^2+y^2).\end{cases}$ (III)

1°/ Linéariser le syst (III) au voisin de (0,0), conclure.

2°/ utiliser une fct de Lyapounov (simple!) pour étudier la stabilité de (0,0).

3°/ Montrer l'existance d'un cycle limite.

Correction :

EXO1 :

$$\begin{cases}x - xy = 0\\ -y + xy = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = xy\\ -y + xy = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 0 & \text{ou } y = 1\\ \Downarrow & \Downarrow\\ y = 0 & x = 1\end{cases}$$

dc (0,0) et (1,1) des pts d'équi.

1°/ linéarisation

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix}1-y & -x\\ y & -1+x\end{pmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$, 2 v.plo. distincts, 1 et (-1) donc $(0,0)$ pt selle.

$$J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ $(1,1)$ est un centre donc on ne peut rien dire à la syst (car la linéarisation n'est pas accessible).

2°/ intégrale première :

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{x(1-y)}{-y+xy} \Rightarrow \frac{x-1}{x}\,dx = \frac{1-y}{y}\,dy.$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{1}{y}-1\right)dy$$

$$\Rightarrow x - \ln x = \ln y - y + k.$$

$$\Rightarrow x - \ln x + y - \ln y = k.$$

$$I(1,1) = 2$$

$$I(x,y) = x + y - \ln x - \ln y - 2$$

$$I(x,y) = I(1,1) + (x-1)\frac{\partial I}{\partial x}(1,1) + (y-1)\frac{\partial I}{\partial y}(1,1) + 2(x-1)(y-1)\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(1,1)(x-1)^2 + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(1,1)\cdot(y-1)^2 + O(x^2,y^2).$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial x}(1,1) = 0.$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \frac{1}{1} - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial y}(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y}(1,1) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(1,1) = 1.$$

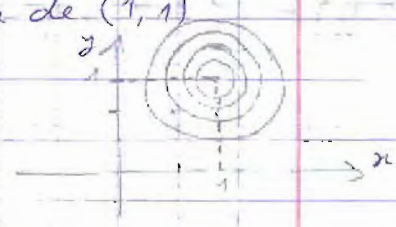
$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(1,1) = 1.$$

$I(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + o(x^2+y^2)$.

Soit (x,y) solution proche de $(1,1)$

$k = (x-1)^2 + (y-1)^2$

le centre est conservé



$$\begin{cases} x = 2y \\ y = 2x - 3x^2 \end{cases}$$

2 pts d'éq : $(0,0)$ et $(\frac{2}{3}, 0)$.

linéarisation :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2-6x & 0 \end{pmatrix}$$

$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ - $\det J = -4 < 0 \Rightarrow (0,0)$ pt selle.

$J_{(\frac{2}{3},0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\frac{2}{3}, 0)$ est un centre.

$\Rightarrow$ th de linéarisation n'est pas applicable

2°/ intégrale première :

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2y}{2x-3x^2} = \frac{dx}{dy} \Rightarrow 2y\,dy = (2x-3x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow y^2 = x^2 - x^3 + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + x^3 - x^2 = k \Rightarrow \boxed{I_1(x,y) = y^2 + x^3 - x^2 = k}$$

$$I(x,y) = x^3 - x^2 + y^2 - I_1\left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

$$\frac{4}{27}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = 3x^2 - 2x \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial x}\left(\frac{2}{3}, 0\right) = 0.$$

$$\frac{\partial I}{\partial y} = 2y \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial y}\left(\frac{2}{3}, 0\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 6x - 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}\left(\frac{2}{3}, 0\right) = 2$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = 2.$$

$$I(x,y) = 2\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 2y^2 + o(\text{—}).$$

Donc $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = k$

eq d'un cercle de centre $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

__ccl__ :

La linéarisation donnant lieu à un centre ne permet pas de conclure, la construction d'une intégrale 1ère formant des courbes fermées (cercles) autour du pt d'équilibre et permis de conclure à la conservation de centres.

EX 02 :

1/ Linéarisation :

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Si $a<0$: $(0,0)$ est un foyer stable.

Si $a>0$: ——— instable

Si $a=0$: $(0,0)$ est un centre.

2/ la nature de $(0,0)$:

$$V(x,y) = x^2+y^2.$$

$$\dot V(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot x + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\dot y$$

$$= 2x\left(ax-\cancel{y}-x(x^2+y^2)\right) + 2y\left(\cancel{x}+ay-y(x^2+y^2)\right)$$

$$= 2a(x^2+y^2) + (x^2+y^2)(-2x^2-2y^2)$$

$$= 2a(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2)^2$$

$$= 2(x^2+y^2)\left[a-x^2-y^2\right]$$

Si $a \leq 0$: $\dot V < 0$, de $(0,0)$ asymptotiquement stable

Si $a > 0$: on peut tjrs trouver (x,y) proche de $(0,0)$ de telle sorte que $\dot V > 0 \Rightarrow$ instable

$a \leq 0$: stabilité de $(0,0)$.

$a > 0$: instabilité de $(0,0)$.

3°/ Cycle limite

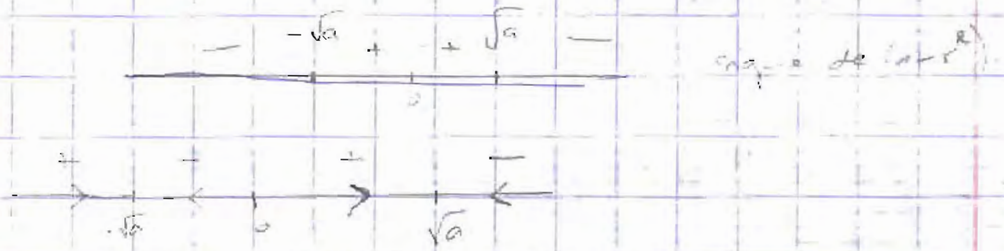
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{r^2 = x^2 + y^2}.$$

$$\Rightarrow 2r\dot r = 2x\dot x + 2y\dot y$$

$$\Rightarrow r\dot r = ar^2 - r^4 \Rightarrow \dot r = r(a - r^2).$$

Si $a > 0$: $r = 0$ ou $r = \sqrt a$ ou $r = -\sqrt a$.

Si $a \leq 0$: $r = 0$ seul pt d'équilibre (~~r=0~~ instable.



$x^2 + y^2 = a$ est un cycle limite.

EXO 3.

$$\ddot x + b\dot x^3 + x = 0$$

① $\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = \ddot x = -by^3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -by^3 - x \end{cases}$

Linéarisation :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3by^2 \end{pmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ $(0,0)$ est un centre.

3°/ fct de Lyapounov.

$V(x,y) = x^2 + y^2 \in C^1$ est définie positive $\dot{V} = -by^4$

- $b > 0$: stabilité de $(0,0)$.
- $b < 0$: instabilité
- $b = 0$ le syst devient linéaire $(0,0)$ centre

$\Rightarrow$ neutralement stable.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$ $(0,0)$ ~~stable~~ centre pour le syst linéaire (original avec $b = 0$)

2011-01-05 / 1432 [illegible]

Poincaré - Bendixon :

Ex 01. $$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - 2y^2) \end{cases}$$

$(0,0)$ est le seul pt d'eq.

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2yx & 1 - x^2 - 6y^2 \end{pmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left.\begin{matrix} \det J = 1 > 0 \\ \operatorname{tr} J = 1 > 0 \end{matrix}\right) \Rightarrow \text{instable.}$$

$$P_J(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Donc le $(0,0)$ est un foyer instable.

3/ $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\dot V(x,y) = x\dot x + y\dot y = y^2(1 - x^2 - 2y^2)$.

. Pour : $x^2+y^2 < \frac{1}{2}$ =

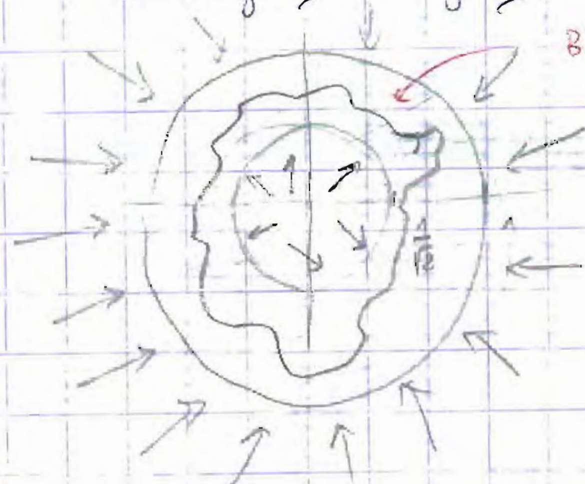
on a : $x^2 + 2y^2 < 2x^2 + 4y^2 < 1$

$\Rightarrow 1 - x^2 - 2y^2 > 0$

donc $\dot V(x,y) > 0$. (on conclure que $(0,0)$ est instable).

. pour $x^2+y^2 > 1$

$x^2 + 2y^2 > x^2+y^2 > 1 \Rightarrow 1 - x^2 - 2y^2 < 0$,



Boîte de Poincaré - Bendixson
(Domaine attractant ne contient pas pt d'équilibre).

Exo2 : $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x - 5y + \dfrac{6y}{1+x^2} \end{cases}$

1/ le seul pt d'équilibre est $(0,0)$ $\qquad 6 = 5 - 5x$

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 - \dfrac{12xy}{(1+x^2)^2} & -5 + \dfrac{6}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = +\lambda^2 - \lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}$$

donc $(0,0)$ est un foyer instable.

2/ Soit $V(x,y) = 2x^2 + \dfrac{y^2}{2}$,

$$\dot{V}(x,y) = 4x\dot{x} + y\dot{y}$$
$$= -5y^2 + \frac{6y^2}{1+x^2} = y^2\left(\frac{6}{1+x^2} - 5\right) = y^2\left(\frac{1-5x^2}{1+x^2}\right).$$

Signe de $\dot{V}$ est signe $(1-5x^2)$.

$$\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ & \frac{-1}{5} & & \frac{1}{5} & \end{array}$$

donc $\dot{V}(x,y) \geq 0$ si $x \in \left[\frac{-1}{5}, \frac{1}{5}\right]$

$\dot{V}(x,y) \leq 0$ si $x \notin \left[\frac{-1}{5}, \frac{1}{5}\right]$

16.03.2011.

Exercice 01.

faire l'étude et analyser la bifurcation du syst.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + \lambda y - x^2 \end{cases} \qquad \lambda \in [-2, +2].$$

Exercice 02: même question pour le syst :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - [axy / (1+dx+cy)]. \\ \dot{y} = -\mu y + \dfrac{eaxy}{1+dx+cy} \end{cases}$$

Exo 3: même pour :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 y - x + b. \\ \dot{y} = -x^2 y + a \end{cases}$$

(après)

يوم الأربعاء 02 جمادى الأولى 1432ه / 06 أفريل 2011م

Ex 01:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + \lambda y - x^2 \end{cases}$$

Points d'équilibre :

$y = 0$, $x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 1$

2 pts d'éq : $(0,0)$ et $(1,0)$.

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-2x & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \det J = -1 < 0 \text{ pt selle.}$$

$$J_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \det J = 1 > 0$$

$$\operatorname{tr} J = \lambda$$

$$\begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ -1 & \lambda-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \alpha\lambda + 1$$

$\Delta = \lambda^2 - 4 < 0$, $\lambda \in [-2, +2]$

pour $\lambda \in]-2, 0[$ alors $(1,0)$ est un foyer stable.

$\lambda \in]0, 2[$ ———————— instable.

$\lambda = 0$ alors $(1,0)$ pour le linéarisé est un centre

* Configuration du théorème P.A.H

2 val. propres complexes conjuguées traversent l'axe imaginaire

la conclusion se fera suite à l'étude de la stabilité au pt de bifurcation $\lambda = \lambda^* = 0$.

Recherche d'une intégrale première

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{x + x^2}{y} \Rightarrow y\,dy = (x - x^2)\,dx$$

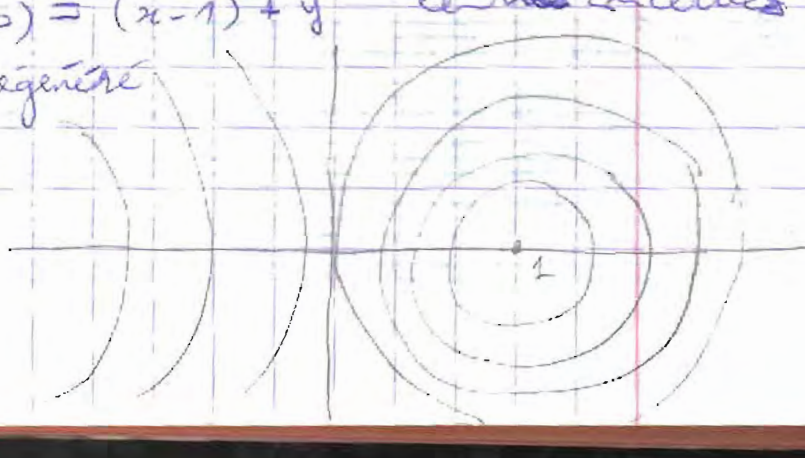
$$\Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$$

$\Rightarrow H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ est une intégrale première pour le syst avec $\lambda = 0$.

D. L. au voisin de $(1,0)$.

$H(x,y) - H(1,0) = (x-1)^2 + y^2$ centres concernés

P.A.H dégénéré



Exercice :

$$\dot{x} = \lambda^2 + 2a\lambda x + x^2 \quad , \quad |a| \neq 1 .$$

a est un réel donné

λ le paramètre de bifurcation.

- faire l'étude de la bifurcation. (diagramme de bifu)

Correction

C'est la perturbation de l'éq. $\dot{x} = x^2 = f(x)$

$f^{\circ}(0) = f'(0) = 0 \quad , \quad f''(0) = 2 .$

$\frac{\partial F}{\partial x^*} = 2x + 2a\lambda = 0 \Rightarrow x = -a\lambda = \varphi(\lambda) .$

$F(\lambda, \varphi(\lambda)) = (1 - a^2)\lambda^2 = \alpha(\lambda) .$

Si $|a| < 1$: $\alpha(\lambda) > 0$ i.e

$\alpha(\lambda) f''(0) > 0$. pas de pts d'équilibre.

Si $|a| > 1$: $\alpha(\lambda) < 0$, 2 pts d'équilibre.

Si $\lambda = 0$, $\alpha(\lambda) = 0$, bifurcation

Diagramme de bifurcation :

$\lambda^2 + 2a\lambda x + x^2 = 0$

$\Delta = 4a^2\lambda^2 - 4\lambda^2 = 4\lambda^2(a^2 - 1) .$

- $\Delta > 0$ si $|a| > 1$. 2 pts d'éq :

$x_1 = \lambda(-a - \sqrt{a^2 - 1}) .$

$x_2 = \lambda(-a + \sqrt{a^2 - 1})$

Exercice 0 :

$$\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 + (\mu_2 + \mu_1^3)x + \mu_1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

- faire l'étude de la bifurcation.

Exercice 1 :

Faire l'étude de la bifurcation et tracer le diagramme de bifurcation dans chacun des cas :

- 1°/ $\dot{x} = 1 + \lambda x + x^2$.
- 2°/ $\dot{x} = \lambda - \cosh x$.
- 3°/ $\dot{x} = \lambda + x - \ln(1+x)$.
- 4°/ $\dot{x} = \lambda + \frac{1}{2}x - \frac{x}{1+x}$.
- 5°/ $\dot{x} = \lambda^2 - x^2$.
- 6°/ $\dot{x} = \lambda^2 + x^2$
- 7°/ $\dot{x} = \lambda x + x^2$ — cours.
- 8°/ $\dot{x} = \lambda x - \ln(1+x)$.
- 9°/ $\dot{x} = x - \lambda x(1-x)$
- 10°/ $\dot{x} = x(\lambda - e^x)$.
- 11°/ $\dot{x} = (x-\lambda)(x^2+\lambda)$.

Correction d'ex 01 :

1°/ $\dot{x} = 1 + \lambda x + x^2$.

$\Delta = \lambda^2 - 4$.

Si $|\lambda| = 2$ bifurcation (1 seul pt d'eq)

$x^* = \frac{-\lambda}{2}$

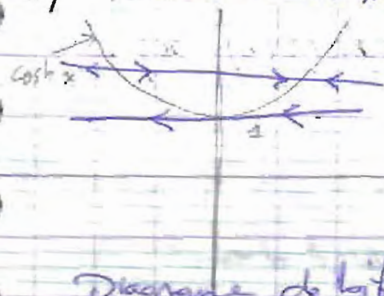
Si $|\lambda| < 2$: pas de pts d'éq.

Si $|\lambda| > 2$: 2 pts d'équilibre : l'un stable l'autre non.

$x_1^* = \dfrac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$, $x_2^* = \dfrac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$.

يوم الأربعاء 23 جمادى الأولى 1432 هـ / 27 أفريل 2011

2/ $\dot{x} = \lambda - \cosh x$.



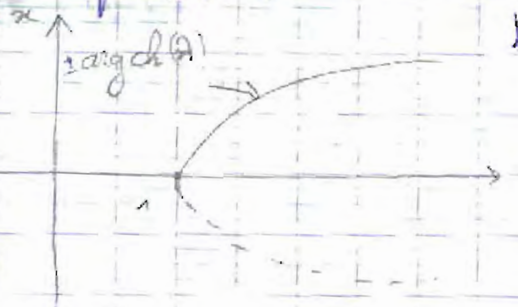
$\lambda < 1$: pas de pt d'éq

$\lambda = 1$: un seul pt d'éq non hyperbolique (shunt négatif).

$\lambda > 1$: 2 pts d'éq $x_1^* < 0$: instable

$x_2^* > 0$: stable.

Diagramme de bifurcation :



bif. saddle node

Observations :

1) $\dot{x} = F(\lambda, x) = \lambda - \operatorname{ch} x$.

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\operatorname{sh} x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 = \varphi(\lambda)}$

pt de bif.

$F(\lambda, x) = 0 \Rightarrow F(\lambda, 0) = 0 \Rightarrow \lambda - \operatorname{ch} 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

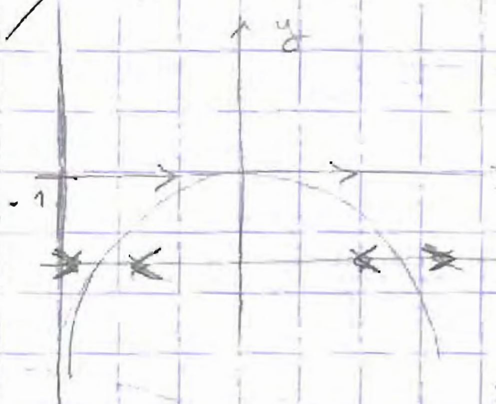
2) $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\lambda^*, x^*) = -\operatorname{ch} x^* \neq 0$.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\lambda, 0) = -1 \neq 0$

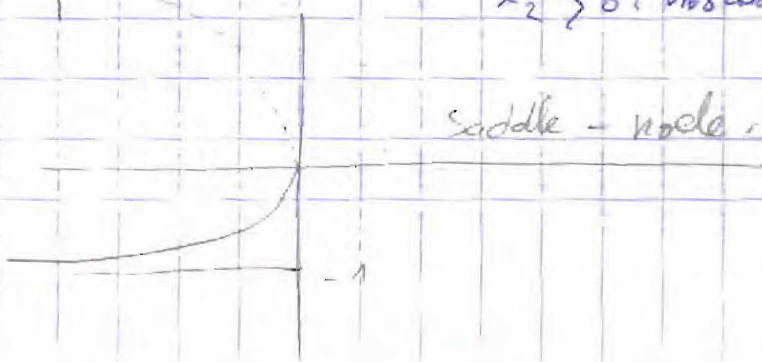
$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, \lambda) = 1 \neq 0$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Saddle-node}}$

3/ $\dot{x} = \lambda + x - \ln(1+x) = \lambda - (\ln(1+x) - x)$.



$\rightarrow \lambda = 0$: pt de bifurcation :
$x^* = 0$: non hyperbolique (s positif).
$\rightarrow \lambda > 0$: pas de pt d'eq.
$\rightarrow \lambda < 0$: 2 pts d'équilibre.
$x_1^* < 0$: stable.
$x_2^* > 0$: instable.



4°/ $\dot{x} = \lambda + \frac{1}{2}x - \frac{x}{1+x}$:

$\dot{x} = \lambda - \left(\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}x\right)$.

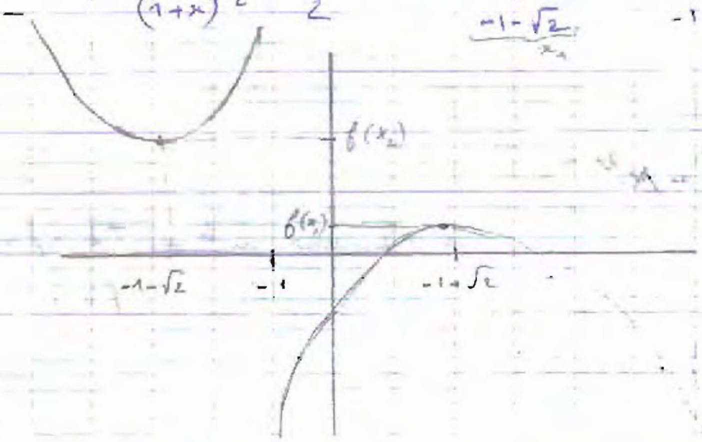
$f(x) = \frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}x$.

$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{2}$

	$-1-\sqrt{2}$ (x_1)		-1		$-1+\sqrt{2}$ (x_2)	
$-$		$+$		$+$		$-$

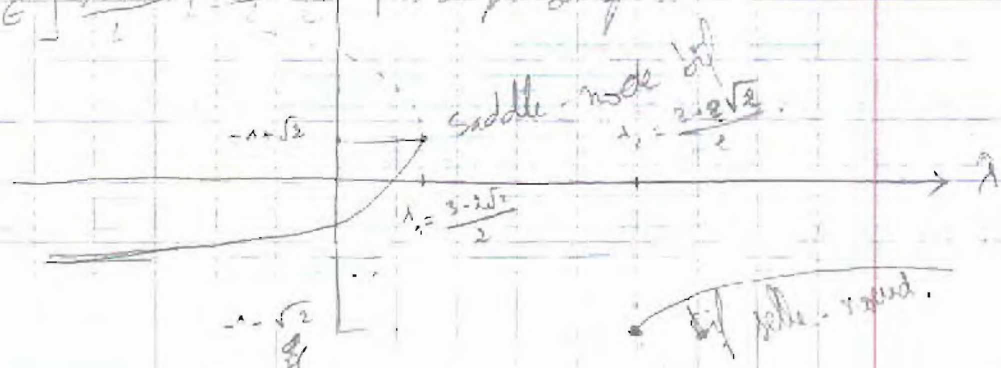
$f(x_1) = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$

$f(x_2) = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$



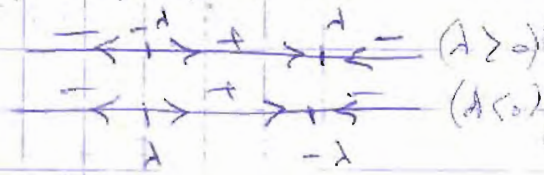
- $\lambda < \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$, 2 pts d'éq. x_1^* x_2^*
- $\lambda = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} \vee \lambda = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$: 1 seul pt d'éq non-hyperbolique
- $\lambda > \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$, 2 pts d'éq. x_1^* x_2^*

$\lambda \in \left]\frac{3-2\sqrt{2}}{2}, \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right[$ pas de pt d'éq



5°/ $\dot{x} = \lambda^2 - x^2 = (\lambda - x)(\lambda + x)$.

$x^* = \pm \lambda$



bifurcation transcritique.

Rque : 6°/ $\dot{x} = \lambda^2 + x^2 \geq 0$.

ne s'annule qu'en $(0,0)$ aucun changement qualitatif ni quantitatif $\lambda < 0$, ou $\lambda > 0$. $\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda^*, x^*) = 0 \ !?!\right)$.

10/ $\dot{x} = x(\lambda - e^x) = f(x)$.

Si $\lambda \leq 0$: $x^* = 0$

si $\lambda > 0$: $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \ln \lambda$.

$f'(x) = \lambda - xe^x - e^x$.

$\to f'(0) = \lambda - 1$

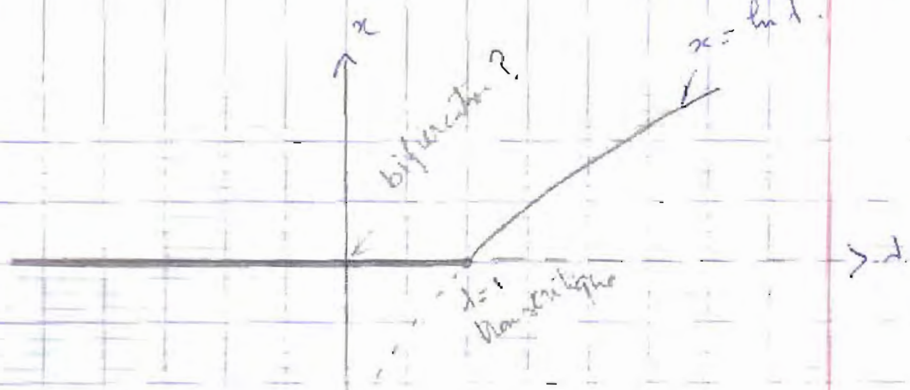
Si $\lambda < 1$: $x^* = 0$: stable

Si $\lambda > 1$: $x^* = 0$: instable.

$\to f'(\ln \lambda) = \cancel{\lambda} - \lambda \ln \lambda - \cancel{\lambda}$

Si $0 < \lambda < 1$: $x_2^* = \ln \lambda$: instable.

Si $\lambda > 1$: x_2^* stable.



8°/ $\dot{x} = \lambda x - \ln(1+x)$.

$f(x) = \lambda x - \ln(1+x)$

$x \in]-1, +\infty[$

$f'(x) = \lambda - \frac{1}{1+x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda} - 1$ (minimum)

$\lambda < 0$: $f' < 0$, $f'(0) < 0$: $x = 0$ pt d'eq

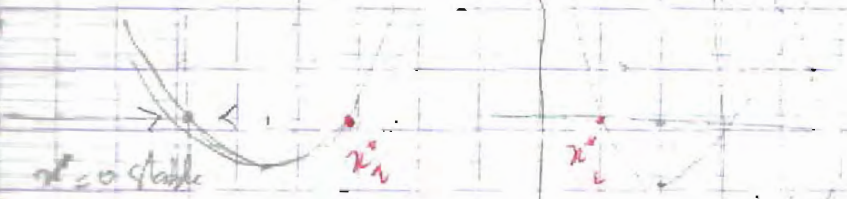
$\lambda > 0$:

f'	$-$	$+$
f	↘	↗

$(1-\lambda) + \ln(\lambda)$

utiliser matlab pour dessiner le graphe de la réciproque de $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

$0 < \lambda < 1$. | $\lambda > 1$



$x^* = 0$ stable | $x^*_1 = 0$ instable

$x^*_2 > 0$ instable | $x^*_2 < 0$ stable

$\lambda x = \ell(1+x) \Longrightarrow \lambda x = x - \frac{x^2}{2} \Longrightarrow x = 0$

$x = -2\lambda + 2$

يوم الأربعاء 01 جمادى الثانية 1432 / 04 ماي 2011

12°/ $\dot{x} = \lambda x + 4x^3$.

13°/ $\dot{x} = \lambda x - 4x^3$.

14°/ $\dot{x} = \lambda x - \operatorname{sh} x$.

15°/ $x = x + \dfrac{\lambda x}{1+x^2}$.

16°/ $\dot{x} = \lambda x + x^3 - x^5$.

17°/ $\dot{x} = \lambda x - \sin x$.

Indication

1/ pour $\lambda = 0$, faire l'étude de l'éq.

2/ Mq, pour $\lambda > 1$, $\exists!$ pt d'éq, étudier sa stabilité

3/ qd λ décroît de $+\infty$ à 0, faire l'étude de la bifurcation

4/ pour $0 < \lambda < 1$

Donner une formule approximant les val. de bifurcation

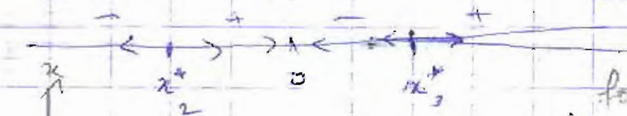
5/ faire l'étude de bifurcation quand λ décroît de (0) à $-\infty$

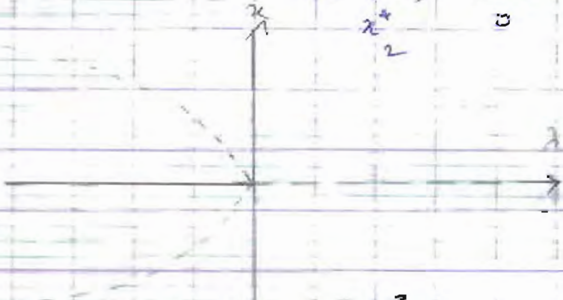
6°/ ~~ét~~ Esquisser un diagramme de bifurcation.

12°/ $\dot{x} = \lambda x + 4x^3 = x(\lambda + 4x^2)$.

Si $\lambda > 0$: $x^* = 0$ est instable

Si $\lambda < 0$: $x_1^* = 0$, $x_2^* = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{2}$, $x_3^* = \frac{\sqrt{-\lambda}}{2}$.



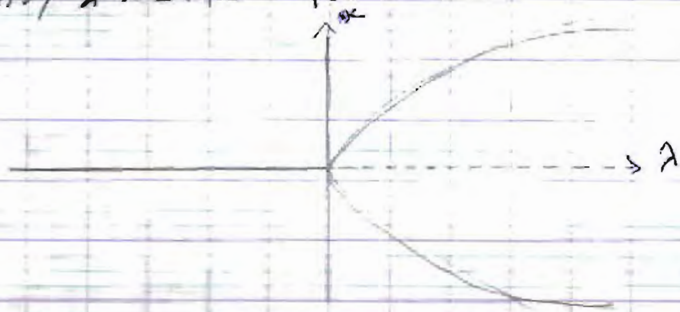


fourche

bifurcation sous-critique

(trifurcation)

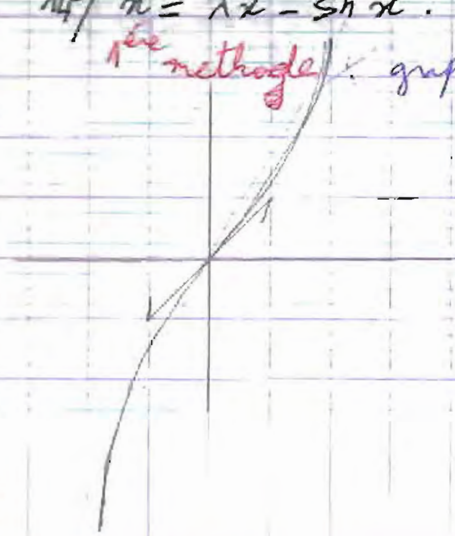
13°/ $\dot{x} = \lambda x - 4x^3$.



bifurcation fourche super-critique.

14°/ $\dot{x} = \lambda x - \operatorname{sh} x$.

1ère méthode : graphique.

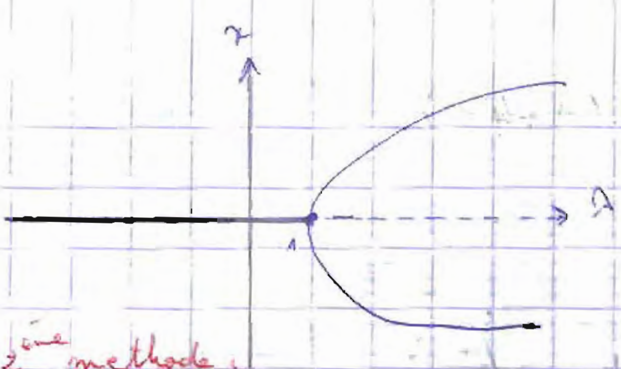


- $\lambda < 1$: $\exists!\ x^* = 0$ stable

$\lambda = 1$: $x^* = 0$ non hyperbolique.

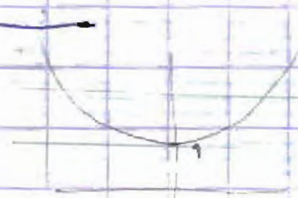
$\lambda > 1$: $x^* = 0$, instable.

$x_1^* < 0$, $x_2^* > 0$: stables



bifurcation fourche
super-critique

2ème méthode.



$f(x) = \lambda x - sh\, x$

$f'(x) = \lambda - ch\, x$.

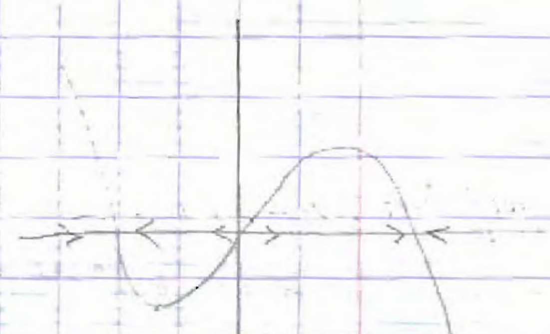
$\lambda = 1$. pt non hyperbolique (dérivée nulle en 0)

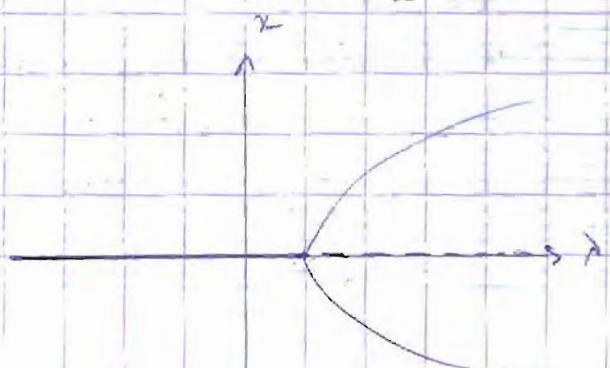
$\lambda < 1$: $f' < 0$

x	
f'	$-$
f	$+\infty$ ↘ 0 ↘ $-\infty$

$\lambda > 1$.

x		$-x_c$		x_c	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty$ ↘	$-$	↗ 0 ↗	$+$	↘ $-\infty$





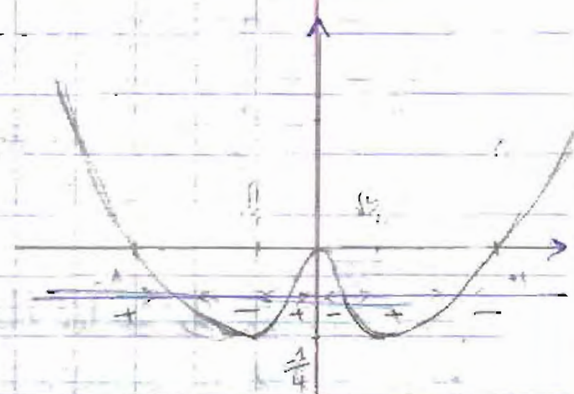
relation avec

16°/ $\dot{x} = \lambda x + x^3 - x^5 = x\left(\lambda - (x^4 - x^2)\right)$.

$h(x) = x^4 - x^2$.

$h'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

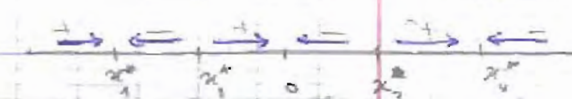


$\lambda < -\frac{1}{4}$: $\exists!\ x^* = 0$ stable.

$\lambda = -\frac{1}{4}$: $x^* = 0$ stable.

$x^*_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ non hyperboliques

$-\frac{1}{4} < \lambda < 0$: $x^* = 0$ stable



$x^*_1 < 0$ stable

$x^*_2 < 0$ instable

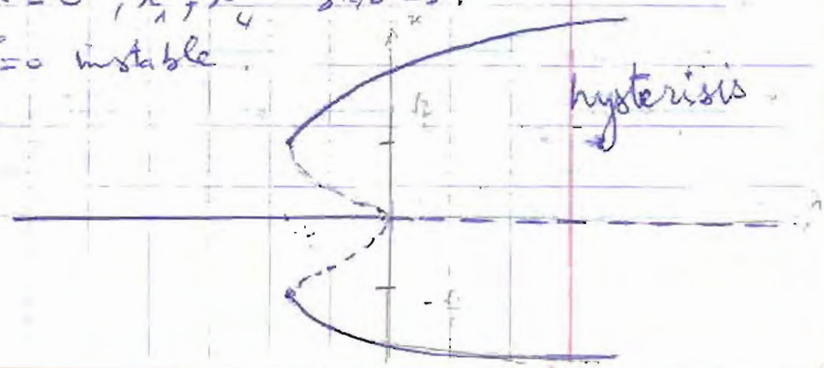
$x^*_3 > 0$ instable.

$x^*_4 > 0$ stable

$\lambda = 0$: 3 pts : $x^* = 0$ (non hyperbolique), x^*_1, x^*_4 stables.

$\lambda > 0$: 3 pts : $x^* = 0$ instable.

x^*_1, x^* stable



hysterisis

الأربعاء 06 جمادى الثانية 1432هـ / 11 ماي 2011م

Exercice 04 : soit le syst :

$$\begin{cases} \dot{x} = -a x + y \\ \dot{y} = \dfrac{x^2}{1+x^2} - b y \end{cases}$$

On se limite au quadrant positif $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $a > 0$, $b > 0$.
On suppose que b est donné, et que a est un paramètre variable.

1/ Esquisser le portrait de phase (en fixant b et variant a)

2/ faire l'étude de bifurcation

Ex 05 : Soit le syst

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y + \sin x \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

faire l'étude de bifurcation (se limiter au cadre local !)

Ex 06 : Soit le syst :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y + x y^2 \\ \dot{y} = x + \lambda y + y^3 \end{cases}$$

après linéarisation déduire le type de bifurcation.

Ex 07 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = \lambda + x^2 - y \end{cases}$$

Esquisser le portrait de phase, et faire l'étude de bifurcation

Guckenheimer & Holmes.

Ex 08. On admet le lemme suivant.

Lemme. En presence d'une bifurcation de Hopf (en $(x^*,y^*)=(0,0)$) tout syst peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = -wy + f(x,y) \\ \dot{y} = wx + g(x,y) \end{cases}$$ (forme normale)

f et g etant nulles en (0,0) de plus si on pose :

$$16a = f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + \frac{1}{\omega}\left[f_{xy}(f_{xx}+f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx}+g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}\right] /_{(0,0)}$$

La bifurcation de Hopf est supercritique si $a<0$ ($a=0$?!?)

_____ sous critique si $a>0$.

Utiliser le lemme pour faire l'étude des syst. suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \lambda x \\ \dot{y} = -x + \lambda y - x^2 y \end{cases}$$ (Hopf super critique)

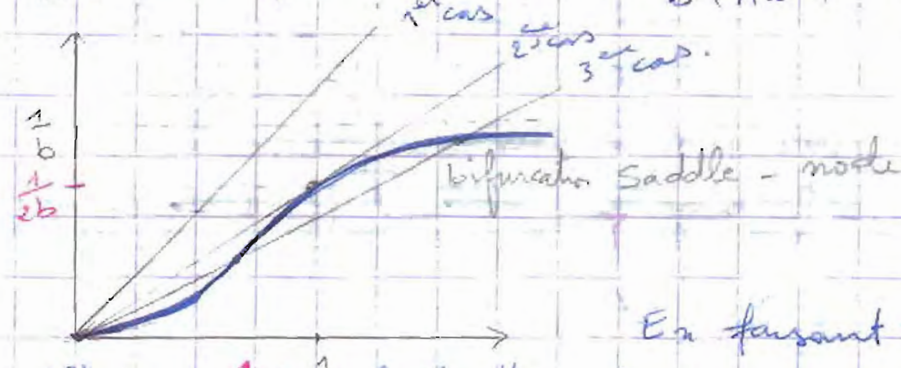
$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y - x^3 \\ \dot{y} = -x + \lambda y + 2y^3 \end{cases}$$ (super critique).

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y - x^2 \\ \dot{y} = -x + \lambda y + 2x^2 \end{cases}$$ (super critique)

الأربعاء 14 جمادى الثانية 1432هـ / 18 ماي 2011م

des indications :

Exo1 : $y = ax$ ($\updownarrow$) $\quad y = \frac{1}{b}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$ ($\leftrightarrow$)



En faisant varier a :

1er cas : 1 seul pt d'eq $(0,0)$

2ème cas : 2 pts d'eq $(0,0)$, (x^*, y^*)

3ème cas : 3 pts d'eq $(0,0)$, (x_1^*, y_1^*) et (x_2^*, y_2^*).

Les pt d'eq :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{b(1+x^2)} = ax \Rightarrow x = 0 \vee ab\,x^2 - x + ab = 0$$

$$\Delta = 1 - 4a^2b^2$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2b} \quad (\text{car } a > 0).$$

Si $a = \frac{1}{2b}$: 2 pts d'eq $(0,0)$ et $\left(1, \frac{1}{2b}\right)$.

Si $a < \frac{1}{2b} \Rightarrow$ 3 pts d'eq $(0,0)$, $\left(\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2ab}, \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2ab}\right)$, et $\left(-, \frac{1}{}\right.$

Rque : Si on fixe a et on varie b on retrouve exactement le même chose résultat (l'asymptote $y = \frac{1}{b}$ varie).
même si on varie a et b on retrouve le même résultat avec la valeur de bifurcation est un courbe d'équa: $a = \frac{1}{2b}$

Ex 02 :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y + \sin x \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

au voisinage de $(0,0)$ le syst devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = (\lambda + \cancel{1}) x + y + x - \frac{x^3}{6} \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

les pts d'éq :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda + 2) x - \frac{x^3}{6} = 0 \quad (*) \\ x = y \end{cases}$$

$(*) \Rightarrow x^* = 0 \vee x_1^* = \sqrt{6\lambda + 12}$, $x_2^* = -x_1^*$.

$6\lambda + 12 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq -2$

Si $\lambda < -2$: 1 seul pt d'éq $(0,0)$.

Si $\lambda = -2$: ———————— $(0,0)$

Si $\lambda > -2$: 3 pts d'éq $(0,0)$, (x_1^*, x_1^*) et (x_2^*, x_2^*).

Si $(0,0)$ change la stabilité alors on a bif. fourche.

$$J_{(0,0)} = J_0 = \begin{pmatrix} (1+\lambda) & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \det = -\lambda - 2, \quad tr = \lambda$$

si $\det J_0 < 0$ i.e $\lambda > -2$ alors $(0,0)$ est selle (instable)
si $\det J_0 > 0$ i.e $\lambda < -2$ alors $tr J_0 < -2 < 0 \Rightarrow$
$(0,0)$ est stable

Les deux nouveaux pts d'éq. s'apparaissent lorsque $(0,0)$ est instable donc
$\lambda^* = -2$ est une bifurcation supercritique.

EX 03.

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y + x y^2 \\ \dot{y} = x + \lambda y + y^3 \end{cases}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(J_0 - \alpha I_2) = 0 \Rightarrow (\lambda - \alpha)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \lambda \pm i$$

$Re(\alpha) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ valeur de bifurcation.

$$\frac{\partial Re(\alpha)}{\partial \lambda}(\lambda^*) = 1 \neq 0$$

$$[Im(\alpha)](\lambda^*) = \pm 1 \neq 0$$

les conditions du th P.A.H sont reunies.
donc il y a une bifurcation de Hopf.

EX04 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = \lambda + x^2 - y \end{cases}$$

$y = 2x$

$\lambda + x^2 - 2x = 0$

$\Delta = 4 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \quad , x^* = 1 \; , y^* = 2$

$\Delta > 0 \Rightarrow \lambda < 1 \quad x_1^* = \frac{2 - 2\sqrt{1-\lambda}}{2} \; , x_2^* = \frac{2 + 2\sqrt{}}{2}$

$\Delta < 0 \Rightarrow \lambda > 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 2x + \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Delta' = 1 - \lambda$

$\Delta' = 0 \Rightarrow \lambda = 1$: un seul pt d'eq $(1, 2)$

si $\Delta > 0 \Rightarrow 1 - \lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 1$.

2 pts d'eq : $(1 + \sqrt{1-\lambda}, \; 2 + 2\sqrt{1-\lambda})$ et $(1 - \sqrt{}, \; 2 - 2\sqrt{})$

si $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda > 1$: pas de pt d'eq.

—— (o) ——

Ex :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda y - \sin x \end{cases}$$

faire une étude précise de bifurcation au voisinage de (0,0) et pour λ petit $\lambda \in (-2,2)$

Ex :

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(b - x - \dfrac{y}{1+x}\right) & x, y \geq 0 \\ \dot{y} = y\left(\dfrac{x}{1+x} - ay\right) & a, b > 0 \end{cases}$$

1°/ Tracer les isoclines ~~et étudier~~ discuter graphiquement la bifurcation.

2°/ Tjrs graphiquement remarquer l'existence d'un pt d'éq $(x^*, y^*) \neq (0,0)$, quel est le type de la bif en ce pt.

Ex 05.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \lambda x \\ \dot{y} = -x + \lambda y - x^2 y \end{cases}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$$ les val propre $\lambda \pm i$

$\exists$ bif de Hopf

$16 a = -2 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow$ Hopf super critique