Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Spécialité Productique

Année 2011-2012
$1^{ère}$ Année
Outils Mathématiques

Examen final

Exercice 1 : Calculer la dérivée $n^{ème}$ de la fonction

$$f(x) = ln(1+x)$$

Exercice 2 : Calculer ce qui suit

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+3} dx \quad ; \qquad I_2 = \int \frac{1}{x^2-6x+5} dx$$

Exercice 3 :

1- Résoudre en fonction des valeurs du paramètre réel $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y'' + \alpha y = 0$$

2- On suppose que $\lambda > 0$, trouver toutes les solutions non nulles de l'équation

$$y'' + \lambda y = 0$$

vérifiant $y(0) = 0$ et $y(\pi) = 0$.

Barême :

Exercice 1 : 6 points.

Exercice 2 : 7 points ; question1= 3,5point, question2= 3,5point.

Exercice 3 : 7 points ; question1= 3 points, question2=4 points.

~ Outils Mathématiques ~

~ Corrigé de l'Examen final ~

Exercice 1 : $f(x) = \ln(1+x)$ (Il est à noter que f est dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$).

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$; $f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$; $f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$; $f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$.

On en déduit la formule : $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$ (3pts).

Il reste à démontrer par récurrence la validité de la formule obtenue ;

- en effet pour $n=1$ $f'(x) = (1+x)^{-1} = (-1)^0 .\ 0!\ (1+x)^{-1}$
- Hypothèse de récurrence pour un $n \in \mathbb{N}$; $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$

il faut montrer que : $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\,(1+x)^{-(n+1)}$.

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left[(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}\right]' = (-1)^{n-1}(-n)(n-1)!\,(1+x)^{-(n+1)}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!\,(1+x)^{-(n+1)}.\ \text{cqfd.} \quad \text{———} \quad (3\text{pts})$$

Exercice 2 :

$$I_1 = \int \frac{x-1}{x^2+x+3}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - 1 - \frac{1}{2}}{x^2+x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+3) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}}\,dx \qquad (1\text{pt})$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+3) - \frac{6}{11}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1}\,dx$$

$$\begin{pmatrix} \text{On pose } t = \frac{2x+1}{\sqrt{11}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{11}}\,dx \ \text{i.e } dx = \frac{\sqrt{11}}{2}\,dt \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+3) - \frac{3}{\sqrt{11}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right) + C \qquad (2\text{pts})$$

(0,5pt)

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2-6x+5} = \frac{1}{(x-5)(x-1)} = \frac{\frac{1}{4}}{x-5} - \frac{\frac{1}{4}}{x-1} \quad \text{———} \quad (\underline{\underline{2pts}})$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x^2-6x+5}\,dx = \int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-5} - \frac{\frac{1}{4}}{x-1}\right)dx = \tfrac{1}{4}\ln|x-5| - \tfrac{1}{4}\ln|x-1| + C. \quad (\underline{\underline{1{,}5pt}}$$

<u>Exercice 3</u> : 1/ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad y'' + \alpha y = 0$.

Equation caractéristique : $r^2 + \alpha = 0 \Longrightarrow r^2 = -\alpha$.

<u>1er Cas</u> : $\alpha < 0$ deux solutions réelles $r_1 = \sqrt{-\alpha}$, $r_2 = -\sqrt{-\alpha}$

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\alpha}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\alpha}x} \quad \text{———} \quad (\underline{\underline{1pt}})$$

<u>2ème Cas</u> : $\alpha = 0$ solution double $r_1 = r_2 = 0$.

$$y = (C_1 + C_2 x) \quad \text{———} \quad (\underline{\underline{1pt}})$$

<u>3ème cas</u> : $\alpha > 0$ deux solutions complexes conjuguées, $z_1 = i\sqrt{\alpha}$, $z_2 = -i\sqrt{\alpha}$

$$y = (C_1 \cos(\sqrt{\alpha}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{\alpha}\,x)) \quad \text{———} \quad (\underline{\underline{1pt}})$$

2/ $\lambda > 0$; $\quad y'' + \lambda y = 0$; c'est le 3ème cas du 1/.

donc $\quad y = (C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\,x))$. ——— $(1pt)$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \text{et} \\ y(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \end{cases} \quad \text{———} \quad (1pt)$$

La deuxième équation donne $C_2 = 0$; ou $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$.

si $C_2 = 0$ (comme $C_1 = 0$) alors $y \equiv 0$ refusé on cherche des solutions non nulles.

si $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = k \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = k^2 \quad k \in \mathbb{Z}$.

Donc pour $\lambda = k^2$ $(k \in \mathbb{Z})$ $\quad y = C_2 \sin(kx)$ ——— $(\underline{\underline{2pts}})$