Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Spécialité Productique

Année 2011-2012
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Examen final

Exercice 1 :

1. Résoudre l'équation diophantienne suivante :

$$74x + 54y = 2000$$

2. Trouver la solution (x, y), telle que $x > 0$ et $y > 0$.

Exercice 2 : Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer P^{-1}.

2. Soit la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

calculer le produit des trois matrices $P^{-1}AP$.

3. Déduire de ce qui précède l'expression de A^n ; où n est un entier naturel.

Exercice 3 : Soient a, b, k et n des entiers naturel non nuls

Montrer par deux méthodes différentes l'implication suivante :

$$a \equiv b[k] \Rightarrow a^n \equiv b^n[k]$$

Barème :

Exercice 1 : 7 points ; question1= 5 points, question2= 2points.

Exercice 2 : 8 points ; question1= 3points, question2= 3points, question3= 2points.

Exercice 3 : 5 points ; première méthode = 2.5 point, deuxième méthode= 2.5 point.

Exercice 1:

1. Résolution de $74x + 54y = 2000$

On commence par calculer pgcd(74, 54).

$\begin{array}{r|l} 74 & 54 \\ 20 & 1 \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 54 & 20 \\ 14 & 2 \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 20 & 14 \\ 6 & 1 \end{array}$, $\begin{array}{r|l} 14 & 6 \\ \underline{2} & 2 \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{array}$ 1pt

ainsi $pgcd(74,54) = 2$, $2 / 2000$ l'équation donnée possède des solutions dans $\mathbb{Z}$.

On divise l'équation par le pgcd i.e. $74x + 54y = 2000 \iff 37x + 27y = 1000$ 1pt

Comme 27 et 37 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $37u + 27v = 1$.

$\begin{array}{r|l} 37 & 27 \\ 10 & 1 \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 27 & 10 \\ 7 & 2 \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ 3 & 1 \end{array}$, $\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}$; $\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \underline{0} & 3 \end{array}$

$37 = 27 + 10$; $27 = 2 \times 10 + 7$; $10 = 7 + 3$; $7 = 2 \times 3 + 1$

Pour trouver u, et v on "remonte" les divisions successives, on trouve

$u = -8$; $v = 11$ soit $37 \times (-8) + 27 \times 11 = 1$. 1pt

Donc $37 \times (-8000) + 27 \times (11000) = 1000$,

par suite $(x_0, y_0) = (-8000, 11000)$ est une solution particulière. 1pt

$$
\begin{array}{rl}
- & 37x + 27y = 1000 \\
 & 37(-8000) + 27(11000) = 1000 \\
\hline
\end{array}
$$

$37(x + 8000) + 27(y - 11000) = 0 \implies 37(x + 8000) = 27(11000 - y)$.

Comme 27 et 37 premiers entre eux ; d'après le lemme de Gauss

$27 / (x + 8000) \implies x + 8000 = 27k, \ k \in \mathbb{Z} \implies x = (-8000 + 27k), \ k \in \mathbb{Z}$.

et par suite $11000 - y = 37k \implies y = (11000 - 37k) \quad k \in \mathbb{Z}$.

l'ensemble des solutions est : $\{(x,y) = (-8000 + 27k, 11000 - 37k), k \in \mathbb{Z}\}$ 1pt

2. $x > 0 \implies -8000 + 27k > 0 \implies k > 296,296$

$y > 0 \implies 11000 - 3k > 0 \implies k < 297,297$ 2pts

ainsi $k \in \mathbb{Z} \quad 296,2 < k < 297,2 \implies k = 297$.

$x = -8000 + 27 \times 297 = 19$ $\qquad (x, y) = (19, 11)$.

$y = 11000 - 37 \times 297 = 11$

Exercice 2:

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\det P = 1(-1) + 1(-1) = -2 \neq 0$

P est inversible et P^{-1} existe. (1pt)

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^t\mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$ (2pts)

2. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; notons $P^{-1}AP = B$. (3pts)

3. $P^{-1}AP = B \Rightarrow AP = PB \Rightarrow A = PBP^{-1}$.

ainsi $A^n = A \times A \cdots \times A = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) \times \cdots \times (PBP^{-1})$; I

$P^{-1}P = I$ nous obtenons alors $A^n = PB.B.B \ldots BP^{-1} = PB^nP^{-1}$ (1pt)

il suffit alors de remarquer que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

et donc $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 & (-1)^{n+1} + 1 & (-1)^{n+1} + 1 \\ 1 - 2^n & 1 + 2^n & 1 - 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$ (1pt)

Exercice 3: $a \equiv b\,[k] \Rightarrow a^n \equiv b^n\,[k]$

1ère méthode : Par récurrence.

$n = 1$ $a \equiv b[k]$ est vérifiée c'est l'hypothèse.

on suppose que $a^n \equiv b^n[k]$ il faut montrer que $a^{n+1} \equiv b^{n+1}[k]$

$a^n \equiv b^n[k]$ et comme $a \equiv b[k]$ alors : $a^n.a \equiv b^n.b[k] \Rightarrow a^{n+1} \equiv b^{n+1}[k]$.

donc $a \equiv b[k] \Rightarrow a^n \equiv b^n[k]$ (2,5pt)

2ème méthode :

il suffit de remarquer l'identité : $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Comme par hypothèse $a \equiv b\,[k] \Rightarrow k/(a-b) \Rightarrow a - b = k.k'$.

ainsi $a^n - b^n = k.k'(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = k\underbrace{k'k''}_{K} = kK$.

Donc $k/(a^n - b^n) \Rightarrow a^n \equiv b^n[k]$. (2,5pt)